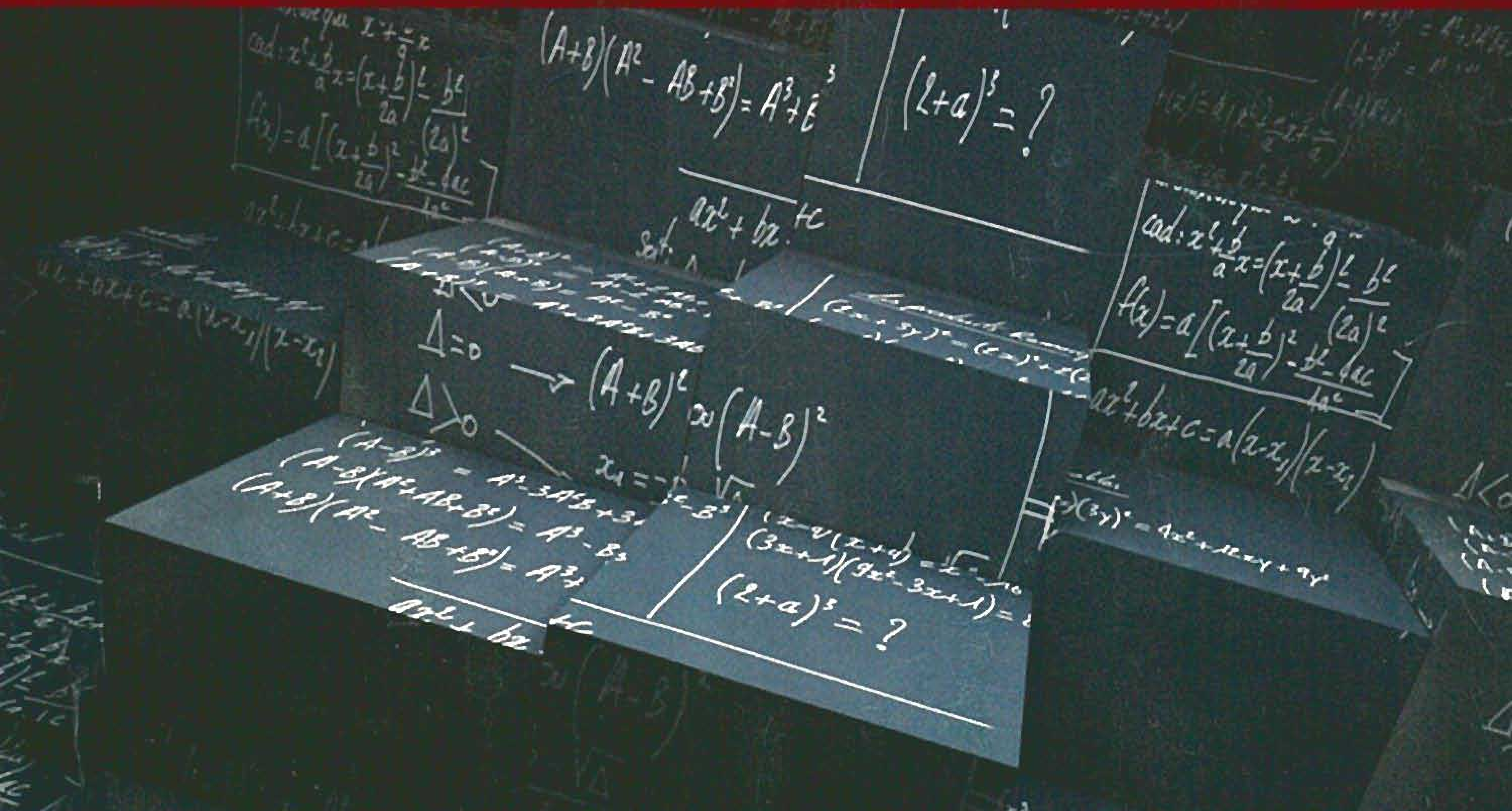
М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 4



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 4

Учебное пособие

Рекомендовано Иркутским региональным отделением научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность»

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.16
Ф19

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ

Издание выходит в рамках Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 гг., проект Р121-02-001

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор *Н. А. Сидоров*,
д-р физ.-мат. наук, зав. отделением нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН *А. А. Щеглова*

Ф19 **Фалалеев М. В.**
Математический анализ. В 4 ч. Ч. 4 : учеб. пособие / М. В. Фалалеев. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2013. – 113 с.
ISBN 978-5-9624-0826-2 (ч. 4)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Четвертая часть курса включает теорию рядов и интегралов Фурье, теорию кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность».

Библиогр. 38 назв.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9624-0826-2 (ч. 4)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Оглавление

Предыдущие главы курса:

1. Введение;
2. Предел числовой последовательности;
3. Предел функции. Непрерывность функции;
4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной;
5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана;
6. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана–Стилтьеса;
7. Элементы общей топологии и функционального анализа;
8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных;
9. Числовые ряды;
10. Функциональные последовательности и ряды;
11. Степенные ряды;
12. Интегралы, зависящие от параметра,

распределены на три части: первая часть включает главы 1–5, вторая часть — 6–8 и третья — 9–12.

13. Ряды Фурье и преобразование Фурье

13.1. Ортонормированные системы евклидовых пространств и общие ряды Фурье

Евклидовы пространства

Определение. Множество X элементов (векторов) называется *евклидовым пространством* над полем вещественных чисел, если

1) множество X наделено структурой линейного пространства над полем вещественных чисел R;

2) на множестве X задана билинейная числовая функция, обозначаемая $(\cdot,\cdot)$ и называемая *скалярным произведением*;

3) операции линейного пространства и скалярное произведение связаны между собой следующими свойствами:

а) (*положительность*) $(f,f) \geq 0 \quad \forall f \in X$, причем $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

б) (*симметрия*) $(f,g) = (g,f) \quad \forall f,g \in X$;

в) (*однородность*) $(\lambda f, g) = (f, \lambda g) = \lambda(f,g) \quad \forall f,g \in X$, $\forall \lambda \in R$.

Операция скалярного произведения индуцирует норму (длину) на пространстве X по правилу

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

Операция скалярного произведения и норма (длина) связаны между собой неравенством Коши–Буняковского

$$(f,g)^2 \leq (f,f)\cdot(g,g) = \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$$

или

$$|(f,g)| \leq \|f\|\cdot\|g\|,$$

справедливость которого следует из следующих простых рассуждений:

$\forall f, g \in X$ и $\forall \lambda \in R$

$$0 \leq \|f-\lambda g\|^2 = (f-\lambda g, f-\lambda g) = (f,f)-2\lambda(f,g)+\lambda^2(g,g) =$$
$$= \|f\|^2 - 2\lambda(f,g) + \lambda^2\|g\|^2.$$

Поскольку полученный квадратный трехчлен (относительно λ) принимает лишь неотрицательные значения, то его дискриминант не положителен $\frac{D}{4} \leq 0$, т. е.

$$\frac{D}{4} = (f,g)^2 - \|f\|^2 \cdot \|g\|^2 \leq 0,$$

откуда и получаем неравенство Коши–Буняковского.

Справедливо также неравенство (аксиома) треугольников

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Действительно,

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{\|f\|^2 + 2(g,f) + \|g\|^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{\|f\|^2 + 2|(g,f)| + \|g\|^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(\|f\| + \|g\|)^2} = \|f\| + \|g\|.$$

Определение. Два элемента f и g евклидова пространства X называются *ортогональными*, если $(f,g) = 0$. Соответственно последовательность элементов $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k, \ldots\}$ евклидова пространства X называются *ортонормированной системой*, если $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$ и $\|\phi_i\| = 1$ $\forall i, j \in N$, здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Пример 1. Пусть X — линейное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, причем в каждой точке разрыва 1-го рода (других нет) x_i функция $f(x)$ принимает значение

$$f(x_i) = \frac{f(x_i+0) + f(x_i-0)}{2}.$$

При таком предположении в X можно задать операцию скалярного произведения по правилу

$$(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$$

и тем самым наделить X структурой евклидова пространства.

а) Классическим примером ортонормированной системы при $[a,b] \equiv [-\pi,\pi]$ является *тригонометрическая система* функций вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}};\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}};\quad \ldots;\quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}};\quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}};\quad \ldots$$

б) При $[a,b] \equiv [-1,1]$ последовательность *многочленов Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}, \qquad n \in N,$$

порождает ортонормированную систему функций вида

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x), \qquad n \in N.$$

в) При $[a,b] \equiv [-1,1]$ *полиномы Чебышева* $T_n(x) = 2^{1-n}\cos[n(\arccos x)]$, $n \in N$ (обладающие наименьшей нормой в $C[-1,1]$ среди всех приведенных многочленов степени n) порождают следующую ортонормированную систему функций:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}, \qquad \phi_n(x) = \frac{2^{n-0,5}\cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}, \qquad n \in N.$$

г) При $[a,b] \equiv [-1,1]$ *система функций Радемахера*

$$\phi_n(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(2^{n+1}nx\right)\right), \qquad n \in N,$$

является ортонормированной и находит свое применение в теории вероятностей.

д) При $[a,b] \equiv [0,1]$ в исследованиях по теории функций находит свое применение *система функций Хаара*, также являющаяся ортонормированной,

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \le x < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}; \\ -\sqrt{2^n}, & \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < x \le \dfrac{2k}{2^{n+1}}; \\ 0, & \text{при остальных}\, x \in [0,1], \end{cases}$$

$n \in N \cup \{0\}$, $k = 1, 2, 4, \ldots, 2^n$.

Ряды Фурье в евклидовых пространствах. Пусть в евклидовом пространстве X задана некоторая ортонормированная система элементов $\{\phi_k\}$.

Определение. *Рядом Фурье* элемента $f \in X$ по ортонормированной системе $\{\phi_k\}$ называется ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\phi_k$, где числа $f_k = (f, \phi_k)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента f. Конечную сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\phi_k$ называют *n-частичной суммой ряда Фурье.*

Теорема. *Среди всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\phi_k$, $c_1, \ldots, c_n \in R$, наименьшее отклонение от f по норме (индуцированной скалярным произведением) имеет n-частичная сумма ряда Фурье элемента f.*

Доказательство. Действительно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k - f, \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2,$$

отсюда сразу получаем, что квадрат отклонения (по норме X) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ от элемента f будет наименьшим при $c_k = f_k$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Для любого элемента $f \in X$, любой ортонормированной системы $\{\phi_k\}$ и при всех $n \in N$:*

а) $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \le \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \phi_k - f \right\|^2$;

б) *справедливо* ***равенство Бесселя***

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \phi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2;$$

в) *справедливо* ***неравенство Бесселя*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$.

Доказательство. Справедливость утверждений а) и б) следует непосредственно из доказанной теоремы. Из равенства Бесселя следует неравенство $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \ge 0$ или $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2$, которое означает ограниченность сверху последовательности частичных сумм числового ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$. Из такой ограниченности в свою очередь следует сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ (см. § 9.2), неравенство Бесселя теперь естественным образом вытекает из теоремы о монотонности предела для сходящихся числовых последовательностей (см. § 2.2). **Следствие доказано.**

Пример 2. Пусть X — линейное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, тогда для любой $f(x) \in X$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе функций принято называть *тригонометрическим рядом Фурье*, коэффициенты которого определяются формулами

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Неравенство Бесселя здесь приобретает вид

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k^2 + \tilde{f}_k^2\right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Замечание 1. В классической теории тригонометрических рядов Фурье такие ряды принято записывать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_0 = \frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{\tilde{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx,$$

и в этих обозначениях неравенство Бесселя принимает вид

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right)\le\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

или

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Замечание 2. Из неравенства Бесселя в силу необходимого условия сходимости числовых рядов следуют предельные равенства для коэффициентов Фурье $a_k \to 0$ и $b_k \to 0$ при $k \to \infty$.

13.2. Замкнутые и полные ортонормированные системы в евклидовых пространствах

Пусть X — евклидово пространство, $\{\phi_k\}$ — ортонормированная система элементов.

Определение. Ортонормированная система $\{\phi_k\}$ называется *замкнутой*, если любой элемент $f \in X$ можно приблизить по норме пространства X (индуцированной скалярным произведением) с любой наперед заданной точностью линейной комбинацией конечного числа элементов системы $\{\phi_k\}$.

Замечание 1. Отметим, что в любом гильбертовом пространстве существуют замкнутые ортонормированные системы.

Теорема (равенство Парсеваля). *Если ортонормированная система $\{\phi_k\}$ замкнута, то для любого элемента $f \in X$ неравенство Бесселя переходит в равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, называемое равенством Парсеваля.*

Доказательство. Пусть $f \in X$ — произвольное и $\epsilon > 0$. Так как $\{\phi_k\}$ замкнута, то существуют числа $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\phi_k \right\|^2 < \epsilon$, но в силу следствия из теоремы предыдущего параграфа

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k \right\|^2 < \epsilon$$

или

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \epsilon.$$

Однако в силу неравенства Бесселя при всех $m > n$

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 < \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \epsilon,$$

т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что при всех $m > N_\epsilon$ выполняется неравенство

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 < \epsilon,$$

что означает предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \|f\|^2 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если ортонормированная система $\{\phi_k\}$ замкнута, то для любого элемента $f \in X$ его ряд Фурье по норме пространства X сходится к f, т. е.*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\phi_k - f \right\| = 0.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства Бесселя (см. следствие из теоремы предыдущего параграфа) и доказанной теоремы, так как справедливо двойное неравенство

$$0 \le \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \phi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Следствие доказано.

Замечание 2. Если доказать замкнутость тригонометрической системы функций (см. далее § 13.4)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}};\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}};\ \ldots;\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}};\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}};\ \ldots,$$

то в соответствии со следствием для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней по интегральной норме (или, как принято говорить, «в среднем»)

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}.$$

Определение. Ортонормированная система элементов $\{\phi_k\}$ называется *полной*, если всякий элемент $f \in X$, ортогональный ко всем элементам системы $\{\phi_k\}$, является нулевым элементом пространства X.

Теорема. *Всякая замкнутая ортонормированная система элементов полна.*

Доказательство. Пусть система элементов $\{\phi_k\}$ замкнута и $f_k = (f, \phi_k) = 0$ при всех $k \in N$, тогда в силу равенства Парсеваля $\|f\| = 0$, что в силу аксиомы неотрицательности нормы и означает $f = 0$. **Теорема доказана.**

Замечание 3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, однако в гильбертовом пространстве эти понятия эквивалентны.

Теорема (единственности). *Если ортонормированная система элементов $\{\phi_k\}$ полна в X и $f \neq g$, то ряды Фурье элементов f и g различны.*

Доказательство (от противного). Пусть ряды Фурье элементов f и g совпадают, т. е. все коэффициенты Фурье элемента $(f-g)$ нули, а значит, элемент $(f-g)$ ортогонален ко всем элементам полной ортонормированной системы $\{\phi_k\}$, т. е. $f-g=0$ или $f=g$. **Теорема доказана.**

13.3. Теорема Вейерштрасса для периодических функций

Выражение вида

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\bar{c}_k \cos kx + \tilde{c}_k \sin kx), \qquad c_0, \bar{c}_k, \tilde{c}_k \in R,$$

называется тригонометрическим многочленом (полиномом).

Теорема. *Если $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, тогда для любого положительного ϵ найдется тригонометрический полином $T(x)$ такой, что $\forall x \in [-\pi,\pi]$ справедливо неравенство $\max\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x) - T(x)| < \epsilon$.*

Доказательство проведем в два этапа.

1. Пусть $f(x)$ — четная функция на $[-\pi,\pi]$, тогда сложная функция $F(t) = f(\arccos t)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$. По теореме Вейерштрасса для алгебраических полиномов $\forall\epsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен (см. §11.4) $P(t)$ такой, что при всех $t \in [-1,1]$ выполняется неравенство

$$|F(t) - P(t)| = |f(\arccos t) - P(t)| < \epsilon.$$

Полагая в этом неравенстве $t = \cos x$, $x \in [0,\pi]$, получим неравенство

$$|f(x) - P(\cos x)| < \epsilon,$$

справедливое при всех $x \in [0, \pi]$, а в силу четности функций $f(x)$ и $P(\cos x)$ справедливое на $[-\pi, \pi]$. Таким образом, $P(\cos x)$ — искомый тригонометрический многочлен, и для четных функций теорема Вейерштрасса доказана.

Замечание. Если четную непрерывную функцию $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ продолжить 2π-периодически на всю числовую ось, то многочлен $P(\cos x)$, будучи сам 2π-периодическим, аппроксимирует с точностью ϵ продолженную функцию $f(x)$ на всей числовой прямой.

2. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, продолжим ее 2π-периодически на всю числовую ось и составим с ее помощью две четные функции

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x.$$

По доказанному выше $\forall \epsilon > 0$ найдется пара тригонометрических полиномов $T_1(x)$ и $T_2(x)$ таких, что $\forall x \in R$ выполняются неравенства

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\epsilon}{4}, \qquad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

или

$$|f_1(x) \sin^2 x - T_1(x) \sin^2 x| < \frac{\epsilon}{4}, \quad |f_2(x) \sin x - T_2(x) \sin x| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Почленно сложив эти неравенства, получим следующее справедливое на всей числовой оси неравенство:

$$\frac{\epsilon}{2} > |f_1(x) \sin^2 x - T_1(x) \sin^2 x| + |f_2(x) \sin x - T_2(x) \sin x| \geq$$

$$\geq \left| \frac{f(x) + f(-x)}{2} \sin^2 x + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x \cdot \sin x - \right.$$

$$\left. - T_1(x) \sin^2 x - T_2(x) \sin x \right| = |f(x) \sin^2 x - T_3(x)|,$$

здесь $T_3(x) = T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x$.

Аналогично рассуждая для 2π-периодической функции $f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$, найдем тригонометрический полином $T_4(t)$ такой, что при всех $t \in R$ выполняется неравенство

$$\left|f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 t - T_4(t)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Полагая здесь $x = t + \frac{\pi}{2}$ и вводя обозначение $T_5(x) = T_4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, получим неравенство (справедливое при всех $x \in R$)

$$|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

складывая которое с полученным выше, имеем

$$\epsilon > |f(x)\sin^2 x - T_3(x)| + |f(x)\cos^2 x - T_5(x)| \geq$$

$$\geq |f(x) - T_3(x) - T_5(x)| = |f(x) - T(x)|,$$

где $T(x) = T_3(x) + T_5(x)$. **Теорема доказана.**

Как следует из доказанной теоремы, условия $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$ являются достаточными для равномерного приближения функции $f(x)$ тригонометрическим полиномом. На самом деле эти условия являются и необходимыми, т. е. справедливо следующее

Следствие (теорема Вейерштрасса). *Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$ приблизить тригонометрическим полиномом, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Доказательство. Достаточность представляет собой доказанную теорему. Докажем необходимость. Пусть существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}$, равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходящаяся к $f(x)$. Так как при всех $n \in N$ $T_n(x) \in C[-\pi,\pi]$, то по теореме о перестановке пределов для равномерно сходящихся функциональных последовательностей (см. § 10.2) $f(x) \in$

$\in C[-\pi, \pi]$. Из равномерной сходимости последовательности $\{T_n(x)\}$ на $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$ следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется многочлен $T_n(x)$ такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

в частности

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \frac{\epsilon}{2},$$

тогда

$$|f(\pi) - f(-\pi)| = |(f(\pi) - T_n(\pi)) + (T_n(\pi) - T_n(-\pi)) +$$

$$+ (T_n(-\pi) - f(-\pi))| \leq |f(\pi) - T_n(\pi)| + |T_n(-\pi) - f(-\pi)| < \epsilon.$$

Полученное неравенство, в силу произвольности $\epsilon > 0$, означает справедливость равенства $f(-\pi) = f(\pi)$. **Следствие доказано.**

13.4. Замкнутость тригонометрической (классической) системы функций и следствия из нее

Напомним, что классической тригонометрической системой функций называется система вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}; \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}; \quad \ldots; \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}; \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}; \quad \ldots$$

Теорема. *Классическая тригонометрическая система функций замкнута (а значит и полна) в пространстве кусочно-непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций (с интегральной нормой).*

Доказательство. Очевидно, любую кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно с любой степенью точности $\epsilon > 0$ по интегральной норме приблизить непрерывной функцией $F(x)$, т. е.

$$\|F(x) - f(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - f(x))^2 dx} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Для этого $F(x)$ выбирают совпадающей с $f(x)$ всюду за исключением малых окрестностей конечного числа точек разрыва (1-го рода) функции $f(x)$ и граничных точек $-\pi$ и π, а в пределах означенных окрестностей $F(x)$ линейна, причем $F(-\pi) = F(\pi)$. Так как при этом функции $F(x)$ и $f(x)$ ограничены, то за счет малости окрестностей можно обеспечить нужную точность приближения.

Поскольку $F(x) \in C[-\pi, \pi]$ и $F(-\pi) = F(\pi)$, то по теореме Вейерштрасса существует тригонометрический полином $T(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|F(x) - T(x)| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2\pi}},$$

тогда

$$\|F(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - T(x))^2 dx} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4 \cdot 2\pi} \cdot 2\pi} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Отсюда в силу аксиомы треугольников нормы получаем требуемую оценку

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \|f(x) - F(x)\| + \|F(x) - T(x)\| < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Системы полиномов Лежандра, Чебышева, функций Хаара замкнуты, а система Радемахера нет.

Следствие 1. *Системы функций* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ *и* $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\}$, $n \in N$, *полны в пространстве кусочно-непрерывных на отрезке* $[0, \pi]$ (*или* $[-\pi, 0]$) *функций* (*с интегральной нормой*).

Доказательство. Если $f(x)$ ортогональна всем элементам системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, то, продолжив ее нечетным образом на $[-\pi, 0]$, мы получим кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию, ортогональную ко всем элементам классической тригонометрической системы, и в силу полноты последней продолженная функция, а вместе с ней и исходная $f(x)$, является тождественно нулевой, что и завершает доказательство следствия 1. **Следствие 1 доказано.**

Следствие 2 (равенство Парсеваля). *Для любой кусочно-непрерывной на* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *справедливо равенство*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Доказательство. См. теорему (равенство Парсеваля) из § 13.2.

Следствие 3 (о сходимости в среднем). *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной функции сходится в интегральной норме* (*в среднем*) *к самой этой функции.*

См. следствие из теоремы (равенство Парсеваля) из § 13.2.

Следствие 4 (о почленном интегрировании рядов Фурье). *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-*

непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции можно почленно интегрировать по любому отрезку $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ последовательность частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, тогда (см. следствие 3)

$$\|S_n(x) - f(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2 dx} \to 0$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2 dx \to 0.$$

Поэтому для любого $\epsilon > 0$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left| \int_a^b (S_n(x) - f(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - f(x)|\, dx =$$

$$= \int_a^b \left(|S_n(x) - f(x)| \cdot \sqrt{\frac{b-a}{\epsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{b-a}} \right) dx \overset{\text{нерав-во Коши}}{\leq}$$

$$\leq \int_a^b \frac{1}{2} \left(|S_n(x) - f(x)|^2 \cdot \frac{b-a}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{b-a} \right) dx =$$

$$= \frac{b-a}{2\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2\, dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Выбирая теперь $n \in N$ таким, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2 dx < \frac{\epsilon^2}{b-a},$$

получаем неравенство $\left|\int\limits_a^b S_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \epsilon$, которое и завершает доказательство. **Следствие 4 доказано.**

Следствие 5 (теорема единственности). *Если две кусочно-непрерывные на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье, то $f(x) = g(x)$ на $[-\pi,\pi]$.*

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из теоремы единственности для абстрактных рядов Фурье (см. § 13.2).

Следствие 6 (о равномерной сходимости). *Если тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на $[a,b] \subset \subset [-\pi,\pi]$, то он сходится (равномерно) на $[a,b]$ именно к $f(x)$.*

Доказательство. Пусть тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $g(x)$, т. е. $\max\limits_{[a,b]} |S_n(x) - g(x)| \to 0$, тогда

$$\|S_n(x) - g(x)\| = \sqrt{\int\limits_a^b (S_n(x) - g(x))^2 dx} \le$$

$$\le \max_{[a,b]} |S_n(x) - g(x)| \cdot \sqrt{b-a} \to 0,$$

здесь $S_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$, т. е. ряд Фурье сходится к функции $g(x)$ по интегральной норме (в среднем). С другой стороны, $S_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ по интегральной норме (в среднем) (см. следствие 3), поэтому в силу неравенства треугольников для нормы получаем

$$0 \le \|g(x) - f(x)\| \le \|g(x) - S_n(x)\| + \|S_n(x) - f(x)\| \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. $\|g(x) - f(x)\| = 0$, что в силу аксиомы неотрицательности нормы означает $g(x) - f(x) = 0$ или $g(x) = f(x)$. **Следствие 6 доказано.**

Замечание 2. Таким образом, если $[a, b] = [-\pi, \pi]$ и тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ сходится равномерно, то этот ряд представляет (в равномерной норме) на $[-\pi, \pi]$ именно функцию $f(x)$.

Замечание 3. Аналогичные утверждения и следствия из них справедливы и для рядов Фурье по любой другой замкнутой ортонормированной системе в пространстве кусочно-непрерывных функций с интегральной нормой, т. е. по системе полиномов Лежандра и Чебышева, по системе функций Хаара.

13.5. Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрических рядов Фурье

До сих пор мы говорили о сходимости в среднем (по интегральной норме) тригонометрического ряда Фурье к породившей его функции, но ничего не говорили о поточечной или равномерной сходимости таких рядов, в то время как в предыдущих главах формулировки давались в терминах равномерной и поточечной сходимости. В 1876 году дю Буа-Реймон построил непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию, удовлетворяющую условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрический ряд Фурье которой, не сходится к ней даже поточечно, таким образом одной непрерывности явно мало. В этом параграфе будут сформулированы и доказаны соответствующие достаточные утверждения, изложению которых предпошлем определение кусочно-непрерывной производной.

Определение. Функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ *кусочно-непрерывную производную*, если производная $f'(x)$

существует и непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых $f'(x)$ имеет односторонние пределы.

Теорема. *Если $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ и имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную, причем $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно к самой $f(x)$. Более того, ряд из модулей такого тригонометрического ряда Фурье также сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Докажем равномерную сходимость функционального ряда из модулей, т. е. ряда

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k||\cos kx| + |b_k||\sin kx|),$$

на $[-\pi, \pi]$, это будет означать равномерную сходимость самого ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ и в силу следствия 6 (о равномерной сходимости) из теоремы предыдущего параграфа сходиться будет именно к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Интересующий нас функциональный ряд мажорируется (оценивается сверху) числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$, доказав сходимость которого, в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, получим требуемое.

Доопределим производную $f'(x)$ в точках разрыва произвольным образом и найдем ее коэффициенты Фурье

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos kx, & dv = f'(x)\,dx \\ du = -k\sin kx, & v = f(x) \end{array} \right\} =$$

$$= k \cdot \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = k \cdot b_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin kx, & dv = f'(x)\,dx \\ du = k\cos kx, & v = f(x) \end{array} \right\} =$$

$$= -k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -k\cdot a_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\beta_k|}{k}+\frac{|\alpha_k|}{k}\right) \overset{\text{нерав-во Коши}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \overset{\text{рав-во Парсеваля}}{\leq} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx+\frac{\pi^2}{6}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, 2π-периодически продолжить на всю числовую ось, то ее ряд Фурье равномерно на всей оси сходится к 2π-продолженной функции.

Теорема (о порядке роста тригонометрических коэффициентов Фурье). *Если $f(x)\in C^m[-\pi,\pi]$, причем $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 1,\ldots,m$, $f^{(m)}(x)$ имеет на $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывную производную (т. е. $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна), тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|)$ сходится.*

Доказательство. Пусть α_k и β_k коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, тогда $(m+1)$-кратным интегрированием по частям получаем равенство $|\alpha_k|+|\beta_k| = k^{m+1}(|a_k|+$

$+|b_k|)$, откуда следует $k^m(|a_k| + |b_k|) = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}$, далее осталось повторить рассуждения из заключительной части доказательства предыдущей теоремы. **Теорема доказана.**

Теорема (о почленном дифференцировании тригонометрических рядов Фурье). *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы (о порядке роста тригонометрических коэффициентов Фурье), то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно почленно дифференцировать m раз.*

Доказательство. Продифференцируем формально ряд Фурье функции $f(x)$ j раз (где $j = 1, \ldots, m$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j \left\{ a_k \cos\left(kx - \frac{\pi j}{2}\right) + b_k \sin\left(kx - \frac{\pi j}{2}\right) \right\}.$$

Очевидно, как исходный ряд Фурье, так и j раз продифференцированный мажорируются числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|)$, а значит по признаку Вейерштрасса все они сходятся равномерно на $[-\pi, \pi]$, что по теореме о почленном m-кратном дифференцировании функциональных рядов (см. § 10.4) и означает m-кратную почленную дифференцируемость рядов Фурье. **Теорема доказана.**

13.6. Теорема Фейера о суммировании по Чезаро тригонометрических рядов Фурье

Как отмечалось в предыдущем параграфе, тригонометрический ряд Фурье непрерывной функции $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ вообще говоря (т. е. без дополнительных условий) не сходится к $f(x)$ (даже поточечно), тем не менее он суммируем (равномерно на R^1) методом средних арифметических (методом Чезаро). А именно, справедлива следующая

Теорема Фейера. *Если $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, то функциональная последовательность средних арифметических частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ к $f(x)$, т. е.*

$$\sigma_{n+1}(x) = \frac{S_0(x,f) + S_1(x,f) + \ldots + S_n(x,f)}{n+1} \rightrightarrows f(x).$$

Замечание. Если функцию $f(x)$ 2π-периодически продолжить на всю числовую ось, то $\sigma_{n+1}(x) \rightrightarrows f(x)$ на R^1.

Доказательству теоремы Фейера предпошлем два предварительных утверждения.

Лемма 1. *Если $F(x)$ 2π-периодическая функция, причем $F(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} F(t)\,dt \quad \forall x \in R.$$

Доказательство. По свойству аддитивности интеграла Римана $\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} = \int\limits_{x-\pi}^{-\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{x+\pi}$, но

$$\int_{x-\pi}^{-\pi} F(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{c} t = \tau - 2\pi \\ \tau = t + 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{x+\pi}^{\pi} F(\tau - 2\pi)\,d\tau = -\int_{\pi}^{x+\pi} F(\tau)\,d\tau,$$

что и доказывает лемму. **Лемма 1 доказана.**

Лемма 2 (о частичной сумме ряда Фурье).

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \quad \forall x \in R,$$

где $f(x)$ 2π-периодически продолжена с $[-\pi,\pi]$ на R^1.

Доказательство. Непосредственно находим

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos k\tau d\tau\cdot\cos kx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin k\tau\,d\tau\cdot\sin kx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(\tau - x)\right]d\tau = \left\{\begin{array}{c} t = \tau - x \\ \tau = t + x \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt \overset{\text{лемма 1}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(\frac{1}{2} - k\right)t\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \right.\right.$$

$$-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\Bigg]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\left[\sin\frac{t}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Лемма 2 доказана.

Следствие. *Если* $f(x)\equiv 1$, *то*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 0,$$

$$b_k = 0,$$

а значит, все n-частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)\equiv 1$ равны $S_n(x,1)=1$ и доказанная формула принимает вид

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Доказательство теоремы Фейера (*для 2π-периодически продолженной функции*).

$$\sigma_{n+1}(x) = \frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\ldots+S_n(x,f)}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \left(\cos\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) t - \right.$$

$$\left. - \cos\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} (1 - \cos(n+1)t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} 2\sin^2 \frac{n+1}{2} t\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

В частности, записав полученную формулу для функции $f(x) \equiv 1$, получим равенство

$$1 = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

Четную функцию

$$\Phi_{n+1}(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$$

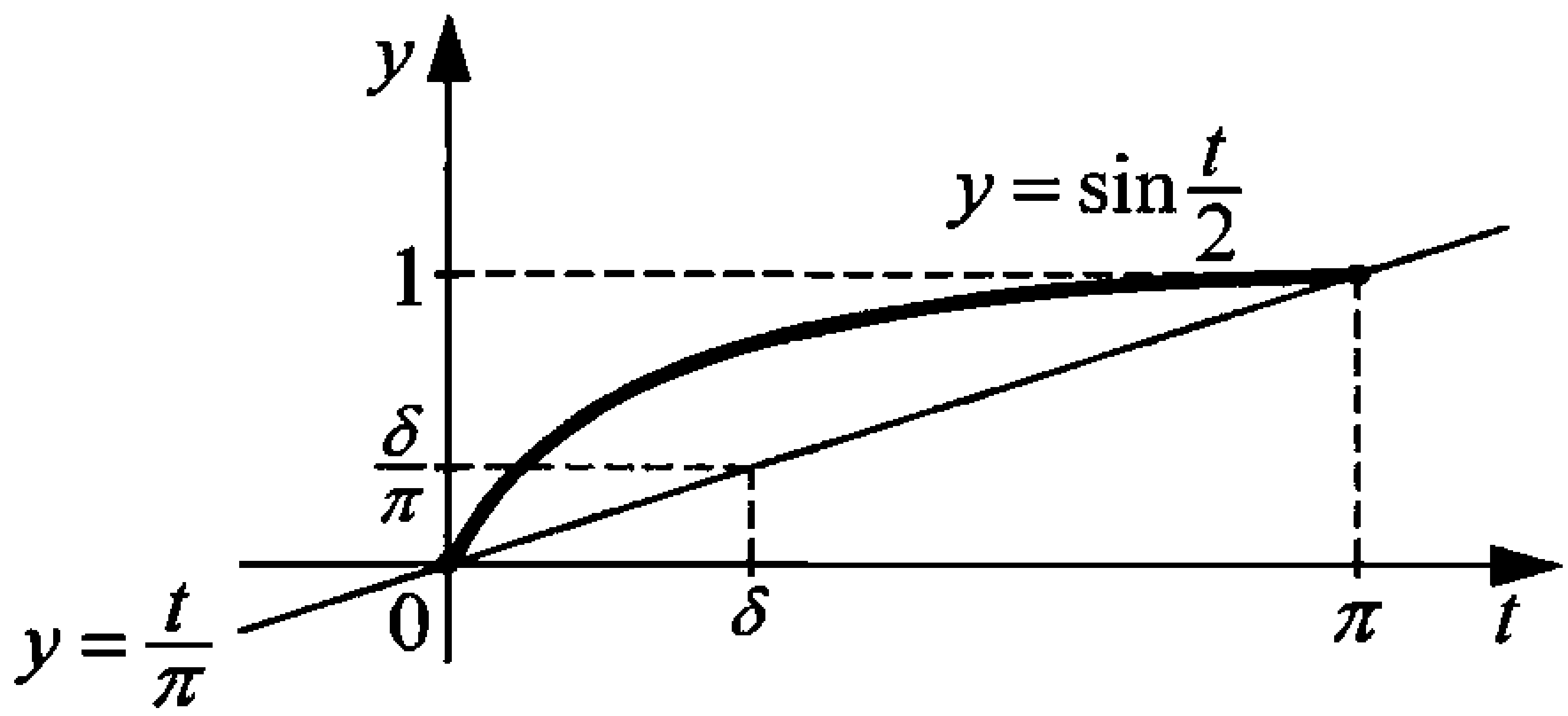
называют *ядром Фейера*, а полученное для $\sigma_{n+1}(x)$ представление называется *интегралом Фейера*. Ядро Фейера обладает свойствами:

1) $\Phi_{n+1}(t) \geq 0$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{n+1}(t) dt = 1$;

3) для любого фиксированного $\delta > 0$ при $n \to +\infty$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_{n+1}(t)\,dt = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_{n+1}(t)\,dt = \mu_n(\delta) \to 0.$$

Свойства 1) и 2) уже доказаны, а свойство 3) следует из следующих соображений: при $\delta \le t \le \pi$ $\sin\dfrac{t}{2} \ge \dfrac{\delta}{\pi}$, поэтому



$$\Phi_{n+1}(t) \le \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1\cdot\pi^2}{\delta^2} = \frac{\pi}{2\delta^2(n+1)},$$

и значит

$$\mu_n(\delta) = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_{n+1}(t)dt \le \frac{\pi(\pi-\delta)}{2\delta^2(n+1)} \to 0.$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна и 2π-периодическая, то $f(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на R, т. е. существует положительная константа $M > 0$ такая, что при всех $x \in R$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$ и для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любых $x'', x' \in R$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta_\epsilon$, справедлива оценка $|f(x'') - f(x')| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Для завершения доказательства теоремы оценим по модулю при $n \to +\infty$ разность

$$f(x) - \sigma_{n+1}(x) = f(x) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{n+1}(t)\,dt - \sigma_{n+1}(x) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))\Phi_{n+1}(t)\,dt =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{-\delta_\epsilon} + \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} + \int_{\delta_\epsilon}^{\pi} \right) (f(x) - f(x+t))\Phi_{n+1}(t)\,dt.$$

Но при достаточно больших $n > N_\epsilon$

$$\left| \int_{-\pi}^{-\delta_\epsilon} (f(x) - f(x+t))\Phi_{n+1}(t)\,dt \right| \le 2M\mu_n(\delta) < \frac{\epsilon}{4},$$

аналогичными рассуждениями при тех же $n > N_\epsilon$ получаем оценку

$$\left| \int_{\delta_\epsilon}^{\pi} (f(x) - f(x+t))\Phi_{n+1}(t)\,dt \right| \le 2M\mu_n(\delta) < \frac{\epsilon}{4}.$$

В силу равномерной непрерывности $f(x)$

$$\left| \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} (f(x) - f(x+t))\Phi_{n+1}(t)\,dt \right| < \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta_\epsilon} \Phi_{n+1}(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\epsilon}{2}.$$

При выбранных $\delta_\epsilon > 0$ и $n > N_\epsilon$ справедливо неравенство $|f(x) - \sigma_{n+1}(x)| < \epsilon \quad \forall x \in R$, которое и означает равномерную сходимость функциональной последовательности $\sigma_{n+1}(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in R$. **Теорема Фейера доказана.**

13.7. Интеграл Фурье

Предварительно введем два понятия.

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* (см. § 5.14) на R, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в некоторой проколотой окрестности точки x *условиям Дини*, если:

а) в точке x существуют односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$;

б) существует положительное число $\epsilon_0 > 0$ такое, что сходятся абсолютно интегралы

$$\int\limits_0^{\epsilon_0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\epsilon_0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\,dt.$$

Замечание. Условию Дини удовлетворяют, например, гельдеровские функции с показателем $0 < \alpha \le 1$, т. е. удовлетворяющие условию $|f(x \pm t) - f(x \pm 0)| \le M|t|^\alpha$. При $\alpha = 1$ гельдеровские функции называют липшицевыми.

Теорема (интеграл Фурье). *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на R и удовлетворяет условию Дини в точке x, то функция $f(x)$ представима в этой точке интегралом Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda.$$

Замечание (к формулировке теоремы). Если ввести обозначения

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \qquad b_\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

то интеграл Фурье функции $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} (a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \sin\lambda x)\,d\lambda,$$

аналогичный внешнему виду ряда Фурье.

Доказательство. Доказательство проведем для случая непрерывности функции $f(x)$, хотя это условие можно опустить, если применить теорему Фубини. Рассмотрим несобственный интеграл первого рода

$$\mathcal{I}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

зависящий от параметра λ. Так как $f(x)$ абсолютно интегрируема на R, то по признаку Вейерштрасса (см. § 12.4) введенный интеграл сходится равномерно по $\lambda \in [0, A]$ при любом $A \in R$, поэтому по теореме об интегрировании по отрезку несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра (см. § 12.5), получаем для функции $\mathcal{J}(x) = \int_0^A \mathcal{I}(\lambda)\,d\lambda$ следующее представление

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^A f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\left(\left.\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\right|_0^A\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt = \left\{\begin{array}{c} t-x=\tau \\ d\tau = dt \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\cdot\frac{\sin A\tau}{\tau}\,d\tau.$$

Теорема будет доказана, если показать справедливость предельного равенства

$$\lim_{A\to+\infty}\mathcal{J}(x)=f(x)\quad\text{или}\quad\lim_{A\to+\infty}(\mathcal{J}(x)-f(x))=0.$$

Для такой проверки воспользуемся интегралом Дирихле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin A\tau}{\tau}\,d\tau=\pi\ \ (A>0)\quad\text{или}\quad\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin A\tau}{\tau}\,d\tau=1,$$

тогда для разности $(\mathcal{J}(x)-f(x))$ получаем представление

$$\mathcal{J}(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-N}+\int\limits_{N}^{+\infty}\right)\frac{f(x+\tau)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-N}+\int\limits_{N}^{+\infty}\right)\frac{f(x)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau.$$

Из сходимости интеграла Дирихле (и ограниченности функции $f(x)$) для любого $\epsilon>0$ можно выбрать N на столько большим, чтобы

$$\left|\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-N}+\int\limits_{N}^{+\infty}\right)\frac{f(x)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau\right|<\frac{\epsilon}{3},$$

соответственно из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ и сходимости интеграла Дирихле при тех же достаточно больших N справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_{N}^{+\infty}\right)\frac{f(x+\tau)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau\right|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Зафиксируем выбранное таким образом $N>\epsilon_0$, где $\epsilon_0>0$ из условия Дини. В силу условия Дини функция $\dfrac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}$ интегрируема по $[-N,N]\supset[-\epsilon_0,\epsilon_0]$, и значит

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\sin A\tau\,d\tau=0,$$

(аналог свойства коэффициентов Фурье), т. е. при достаточно большом A

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\sin A\tau\right|<\frac{\epsilon}{3}.$$

В совокупности три полученных неравенства означают предельное равенство $\lim\limits_{A\to+\infty}\mathcal{J}(x)=f(x)$. **Теорема доказана.**

Замечание (комплексная форма записи интеграла Фурье). Внутренний интеграл в интеграле Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

является четной функцией по λ, поэтому интеграл Фурье можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda.$$

Соответственно при тех же предположениях относительно функции $f(x)$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$ является нечетной функцией по λ, а значит

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda = 0.$$

В этих двух равенствах интегралы по параметру λ рассматриваются в смысле главного значения (по Коши см. § 5.14), т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} * \,d\lambda = \lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N} * \,d\lambda$, поэтому, воспользовавшись формулой Эйлера $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\alpha \in R$, запишем интеграл Фурье в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda(t-x) - i\sin\lambda(t-x))\,dt\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t-x)i}\,dt\right)d\lambda.$$

Эту форму записи называют *комплексной формулой Фурье* (или комплексной формой записи интеграла Фурье).

13.8. Преобразование Фурье и его свойства

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, тогда функцию вида

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t i}\,dt$$

называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. В соответствии с комплексной формулой Фурье справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{\lambda x i} \, d\lambda,$$

которое называют *формулой обращения преобразования Фурье* (или *обратным преобразованием Фурье*).

Замечание. Функция $g(\lambda)$ — Фурье-образ функции $f(x)$ определяется как римановский интеграл (поскольку $f(x)$ абсолютно интегрируема), обратное же преобразование задается несобственным интегралом в смысле Коши (или главного значения (см. § 5.14)).

Пример 1. Если $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma > 0$, то $g(\lambda) = \dfrac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}$. Доказывается это равенство двукратным интегрированием по частям.

Пример 2. Для функции

$$f(x) = \theta(a - |x|) = \begin{cases} 1, & |x| \le a; \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

образ Фурье имеет вид $g(\lambda) = \dfrac{2 \sin \lambda a}{\lambda}$.

Пример 3. Если $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$, то $g(\lambda) = \dfrac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}$. Проще всего этот результат получить с помощью теоремы Коши о вычетах из ТФКП.

Пример 4. Пусть $f(x) = e^{-ax^2}$, тогда $g(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$. В частности при $a = \dfrac{1}{2}$ образом Фурье функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ является $g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, т. е. она же сама (с точностью до постоянного множителя).

Для Фурье-образов принято обозначение $g(\lambda) = F[f]$, т. е.

$$F[f](\lambda) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda ti}\,dt.$$

Свойства преобразования Фурье

1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, то ее Фурье-образов $F[f](\lambda)$ является непрерывной ограниченной функцией на R^1, причем $F[f](\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.

2. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке, производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема на R^1, то $F[f'] = i\lambda F[f]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любого положительного $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любой системы конечного числа взаимно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.

Очевидно всякая абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна, но не наоборот (соответствующий контрпример доставляет «канторова» лестница).

Доказательство. Абсолютно непрерывную на любом отрезке функцию можно представить в виде $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$, тогда в силу абсолютной интегрируемости $f'(x)$ существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x) = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \left(f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt\right),$$

причем они могут быть лишь нулями, иначе функция $f(x)$

окажется неинтегрируемой на R^1. Поэтому

$$F[f'](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-\lambda ti}\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-\lambda ti} & dv = f'(t)dt \\ du = -\lambda i e^{-\lambda ti}dt & v = f(t) \end{array} \right\} =$$

$$= f(t)e^{-\lambda ti}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \lambda i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda ti}\,dt = i\lambda F[f](\lambda).$$

Следствие. Если функция $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке, функции $f(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ абсолютно интегрируемы, то $F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k F[f](\lambda)$.

3. Если функции $f(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ абсолютно интегрируемы, то $|F[f](\lambda)| = o\left(\dfrac{1}{|\lambda|^k}\right)$ при $|\lambda| \to \infty$.

Действительно, в силу свойства 2

$$|F[f]| = \left|\frac{1}{(i\lambda)^k}\right| \cdot |F[f^{(k)}]| = \frac{1}{|\lambda|^k} \cdot |F[f^{(k)}]|,$$

но по свойству 1 $|F[f^{(k)}]| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, откуда и следует свойство 3.

4. Если $f''(x)$ абсолютно интегрируема на R^1, то $F[f]$ абсолютно интегрируема.

Действительно, по свойству 3 $|F[f]| \le \dfrac{C}{|\lambda|^2}$, что в силу признака сравнения сходимости несобственных интегралов и означает требуемое утверждение.

5. Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы, то $F[f]$ дифференцируема и $F[f]' = F[-ixf]$.

Действительно,

$$\frac{d}{d\lambda}(F[f]) = \frac{d}{d\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\lambda ti}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-ti)e^{-\lambda ti}\,dt = F[-ixf].$$

Дифференцирование по параметру здесь законная операция, так как справедливо неравенство

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-ti)e^{-\lambda ti}\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\cdot|-i|\cdot|e^{-\lambda ti}|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,dt,$$

которое в силу признака Вейерштрасса означает равномерную сходимость по параметру λ.

Следствие. Если функции $f(x), xf(x), \ldots, x^m f(x)$ абсолютно интегрируемы, то

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}(F[f]) = F[(-ix)^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

6. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ абсолютно интегрируемы, то их свертка, т. е. функция

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)\cdot f_2(t)\,dt,$$

также абсолютно интегрируема и справедливо равенство $F[f_1 * f_2] = F[f_1]\cdot F[f_2]$.

Пример (уравнение теплопроводности). Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \\ u\Big|_{t=0} = u_0(x), \end{cases}$$

описывающего распространение тепла в однородном стержне, где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{F}{c\rho}$, k — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, $F(t,x)$ —

интенсивность внешних источников тепла в точке x в момент времени t, $u(t,x)$ — температура стержня в точке x в момент времени t, $u_0(x)$ — первоначальное распределение температуры в стержне (в момент времени $t=0$).

Решение уравнения будем искать в следующих предположениях относительно «входных данных»:

а) $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $u_0''(x)$ — абсолютно интегрируемы на R^1;

б) функция $f(t,x)$ при любом фиксированном $t \ge 0$ абсолютно интегрируема по оси x.

Решение будем искать в классе функций $u(t,x)$ таких, что:

а) при любом фиксированном $t > 0$ функции $u(t,x)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ абсолютно интегрируемы по $x \in R^1$;

б) $\left|\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right| \le h(x)$, $h(x)$ — интегрируема на R^1 (т.е. существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$).

Применим преобразование Фурье к задаче Коши для уравнения теплопроводности по переменной x, считая t параметром. Введем обозначения:

$$v(t,\lambda) = F[u(t,x)], \quad v_0(\lambda) = F[u_0(x)], \quad g(t,\lambda) = F[f(t,x)],$$

тогда

$$F\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2 v(t,\lambda),$$

$$F\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} e^{-\lambda x i}\,dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-\lambda x i}\,dx = v_t'(t,\lambda).$$

Таким образом, преобразование Фурье переводит уравнение теплопроводности (уравнение в частных производных) в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v_t'(t,\lambda) = -\lambda^2 a^2 v(t,\lambda) + g(t,\lambda)$$

с начальным условием

$$v(0,\lambda) = v_0(\lambda).$$

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$v(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot v_0(\lambda) + \int\limits_0^t e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cdot g(\tau,\lambda)\,d\tau.$$

Но

$$F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right] = e^{-\lambda^2 a^2 t},$$

поэтому в силу свойства 6 преобразования Фурье получаем формулу Пуассона

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau.$$

14. Двойной интеграл

14.1. Определение двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $R \equiv \{(x;y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Разобьем отрезки $[a;b]$ и $[c;d]$ следующим образом:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k = d, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Этим разбиениям соответствует *разбиение* T *прямоугольника* R на $n \cdot k$ *частичных* прямоугольников

$$T = \big\{R_{ij} \equiv \{(x;y) \, : \, x_{i-1} \le x \le x_i, \;\; y_{j-1} \le y \le y_j\},$$

$$i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, k\big\}.$$

Измельчением (*продолжением*) разбиения T называют разбиение T', полученное добавлением новых прямых, параллельных осям координат Ox и Oy. (Обозначают это следующим образом: $T \prec T'$.)

Внутри каждого частичного прямоугольника R_{ij} выберем произвольную точку (ξ_i, η_j). Введем обозначения: $\Delta R_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ — площадь прямоугольника R_{ij}, $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$ — диагональ прямоугольника R_{ij}, величину $\Delta_T = \max\limits_{i,j} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$ — называют *мелкостью разбиения* T прямоугольника R.

Определение. Выражение вида

$$\sigma = \sigma(f, T, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\xi_i, \eta_j) \Delta R_{ij}$$

называют *интегральной суммой Римана* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению T прямоугольника R и данному выбору точек (ξ_i, η_j) на частичных прямоугольниках R_{ij} разбиения T.

Определение. Число I называют *пределом интегральных сумм Римана* при $\Delta_T \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T прямоугольника R, мелкость которого $\Delta_T < \delta_\epsilon$, и для любого выбора точек (ξ_i, η_j) на R_{ij} выполняется неравенство $|\sigma - I| < \epsilon$.

Если такой предел существует и конечен, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по прямоугольнику R и обозначается

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Функцию $f(x,y)$ в этом случае называют *интегрируемой по Риману* на прямоугольнике R.

Теорема (необходимое условие интегрируемости). *Если функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике R, то $f(x,y)$ ограничена на R.*

Доказательство (*от противного*). Пусть $f(x,y)$ неограничена на R, тогда $f(x,y)$ неограничена на некотором частичном прямоугольнике разбиения R_{ij}. В этом случае соответствующую точку (ξ_i,η_j) можно выбрать такой, что слагаемое $f(\xi_i,\eta_j)\Delta R_{ij}$ будет больше любого наперед заданного числа, а значит и вся интегральная сумма σ оказывается неограниченной, т. е. не будет существовать предела при $\Delta_T \to 0$. **Теорема доказана.**

Пример. Ограниченность лишь необходимое, но не достаточное условие интегрируемости. Действительно, ограниченная функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально;} \\ 0, & x \text{ — иррационально} \end{cases}$$

неинтегрируема по Риману.

14.2. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу

В предположении ограниченности функции $f(x,y)$ на R составим для данного разбиения T прямоугольника R *верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу*

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R_{ij}, \quad s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta R_{ij},$$

где

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y).$$

Поскольку для любого R_{ij} выполняется неравенство $m_{ij} \le f(\xi_i, \eta_j) \le M_{ij}$, то имеет место

Свойство 1. *Для любого разбиения T прямоугольника R и для любого выбора точек (ξ_i, η_j) соответствующая интегральная сумма Римана σ удовлетворяет неравенству $s \le \sigma \le S$.*

Свойство 2. *Для любого разбиения T прямоугольника R и для любого $\epsilon > 0$ точки (ξ_i, η_j) можно выбрать так, что соответствующая интегральная сумма Римана σ удовлетворяет неравенству $0 \le S - \sigma < \epsilon$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$, тогда если T разбивает прямоугольник R на $n \cdot k$ частичных прямоугольников, то точку (ξ_i, η_j) из R_{ij} можно выбрать такой, чтобы

$$M_{ij} - f(\xi_i, \eta_j) < \frac{\epsilon}{\Delta_R},$$

здесь $\Delta_R = (b-a)(d-c)$ — площадь прямоугольника R, тогда

$$0 \le S - \sigma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(M_{ij} - f(\xi_i, \eta_j))\Delta R_{ij} <$$

$$< \frac{\epsilon}{\Delta_R}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Delta R_{ij} = \frac{\epsilon}{\Delta_R} \cdot \Delta_R = \epsilon.$$

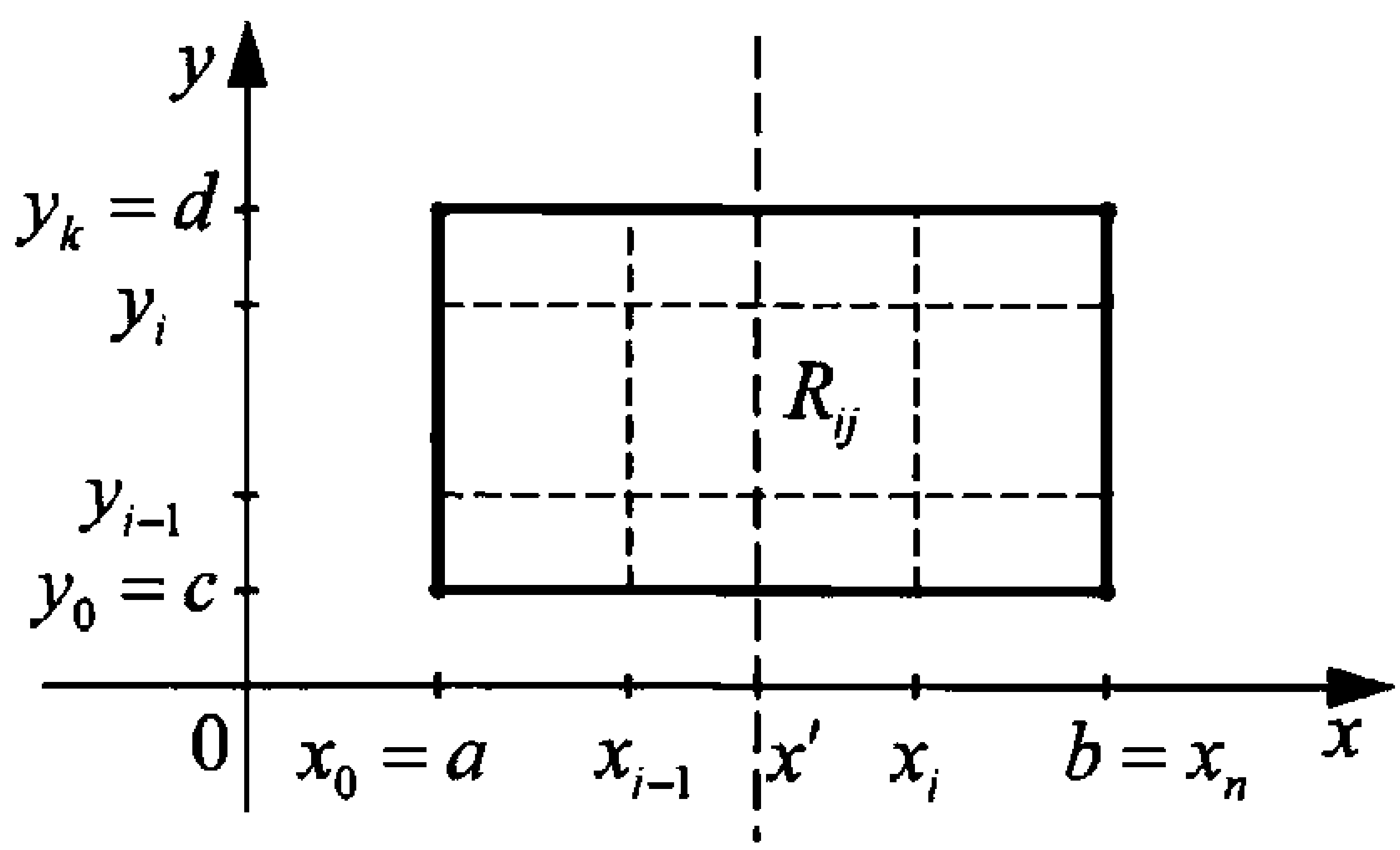
Свойство 2 доказано.

Аналогичное свойство справедливо для нижних интегральных сумм Дарбу, а именно

Свойство 2а. *Для любого разбиения T прямоугольника R и для любого $\epsilon > 0$ точки (ξ_i, η_j) можно выбрать так, что соответствующая интегральная сумма Римана σ удовлетворяет неравенству $0 \le \sigma - s < \epsilon$.*

Свойство 3. *Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R, тогда $s \le s'$, $S' \le S$ (т. е. при добавлении новых прямых разбиения R нижняя интегральная сумма Дарбу может лишь увеличиться, а верхняя лишь уменьшиться).*

Доказательство. Для ясности изложения ограничимся случаем добавления лишь одной новой вертикальной прямой разбиения $x_{i-1} < x' < x_i$, тогда частичные прямо-



угольники R_{ij}, $j = 1, \ldots, k$, распадаются на пары $R_{ij} \equiv \equiv R'_{ij} \cup R''_{ij}$, где $R'_{ij} = [x_{i-1}, x'] \times [y_{j-1}, y_j]$, $R''_{ij} = [x', x_i] \times \times [y_{j-1}, y_j]$. Пусть

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y), \quad M'_{ij} = \sup_{R'_{ij}} f(x,y),$$

$$m'_{ij} = \inf_{R'_{ij}} f(x,y), \quad M''_{ij} = \sup_{R''_{ij}} f(x,y), \quad m''_{ij} = \inf_{R''_{ij}} f(x,y),$$

тогда

поэтому

$$\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R_{ij} = \sum_{j=1}^{k} M_{ij}(\Delta R'_{ij} + \Delta R''_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R'_{ij} + \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R''_{ij} \geq \sum_{j=1}^{k} M'_{ij}\Delta R'_{ij} + \sum_{j=1}^{k} M''_{ij}\Delta R''_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta R_{ij} \leq \sum_{j=1}^{k} m'_{ij}\Delta R'_{ij} + \sum_{j=1}^{k} m''_{ij}\Delta R''_{ij}.$$

Отсюда получаем $s \leq s'$, $S' \leq S$. **Свойство 3 доказано.**

Следствие (из свойства 3). *Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R, полученное добавлением p штук новых прямых, тогда*

$$S - S' \leq (M - m)p \cdot \Delta_T \cdot D, \quad s' - s \leq (M - m)p \cdot \Delta_T \cdot D,$$

здесь $M = \sup\limits_R f(x,y)$, $m = \inf\limits_R f(x,y)$, Δ_T — мелкость разбиения T, D — диагональ прямоугольника R.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по p. Пусть $p = 1$, тогда в обозначениях предыдущего доказательства

$$S - S' = \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R_{ij} - \sum_{j=1}^{k}(M'_{ij}\Delta R'_{ij} + M''_{ij}\Delta R''_{ij}).$$

Поскольку $M \geq M_{ij} \geq M'_{ij} \geq m'_{ij} \geq m_{ij} \geq m$, то

$$S - S' \leq \sum_{j=1}^{k} M\Delta R_{ij} - \sum_{j=1}^{k} m(\Delta R'_{ij} + \Delta R''_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(M - m)\Delta R_{ij} = (M - m)\sum_{j=1}^{k}\Delta R_{ij} =$$

$$= (M - m)\sum_{j=1}^{k} \Delta x_i \cdot \Delta y_j = (M - m)\Delta x_i \sum_{j=1}^{k} \Delta y_j =$$

$$= (M - m)\Delta x_i(d - c) \le (M - m) \cdot \Delta_T \cdot D,$$

так как диагональ прямоугольника больше любой его стороны.

Пусть $p = 2$ и T' получено из T добавлением одной прямой, а T'' получено из T' добавлением другой прямой, тогда $S - S'' = (S - S') + (S' - S'') \le (M - m) \cdot 2 \cdot \Delta_T \cdot D$ и т. д. Для сумм s и s' доказательство проводится аналогично. **Следствие из свойства 3 доказано.**

Свойство 4. *Пусть T' и T'' — любые два разбиения прямоугольника R, S', s' и S'', s'' — их верхние и нижние интегральные суммы Дарбу, тогда $s' \le S''$, $s'' \le S'$ (другими словами любая нижняя интегральная сумма Дарбу не превосходит любую верхнюю интегральную сумму Дарбу).*

Доказательство. Рассмотрим третье разбиение T прямоугольника R, образованное объединением прямых разбиений T' и T'', т. е. $T' \prec T$, $T'' \prec T$, тогда по свойству 3 $s' \le s$, $s'' \le s$, $S' \ge S$, $S'' \ge S$, поэтому $s' \le s \le S \le S''$, $s'' \le s \le S \le S'$. **Свойство 4 доказано.**

Свойство 5. *Множества $\{S\}$ всех верхних интегральных сумм Дарбу и $\{s\}$ всех нижних интегральных сумм Дарбу данной функции $f(x, y)$ для всевозможных разбиений ограничены снизу и сверху соответственно.*

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{R} f(x, y)$, $m = \inf\limits_{R} f(x, y)$, тогда для любого разбиения T прямоугольника R

$$m \cdot \Delta_R = m \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \Delta R_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m\Delta R_{ij} \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta R_{ij} = s \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta R_{ij} = S \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M\Delta R_{ij} = M \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \Delta R_{ij} = M \cdot \Delta_R,$$

итак, $m \cdot \Delta_R \leq s \leq S \leq M \cdot \Delta_R$. **Свойство 5 доказано.**

Согласно свойству 5 числовое множество $\{S\}$ всех верхних интегральных сумм Дарбу ограничено снизу, а значит существует его точная нижняя грань

$$\overline{I} = \inf_T\{S\},$$

называемая *верхним интегралом Дарбу*. Соответственно множество $\{s\}$ всех нижних интегральных сумм Дарбу ограничено сверху, и поэтому существует его точная верхняя грань

$$\underline{I} = \sup_T\{s\},$$

называемая *нижним интегралом Дарбу*.

Поскольку для любых элементов s и S из множеств $\{s\}$ и $\{S\}$ выполняется свойство 4, то неравенство такого же типа справедливо и для интегралов Дарбу $s \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S$, $\forall s \in \{s\}$, $\forall S \in \{S\}$, которое доказывается методом от противного.

Введем два понятия

Определение. Числа α и β называются *пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу* при $\Delta_T \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T прямоугольника R, мелкость которого $\Delta_T < \delta_\epsilon$, выполняются неравенства $|S - \alpha| < \epsilon$, $|s - \beta| < \epsilon$.

Записывают это обычным образом

$$\alpha = \lim_{\Delta_T \to 0} S, \qquad \beta = \lim_{\Delta_T \to 0} s.$$

Лемма Дарбу. $\overline{I} = \alpha = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S$, $\underline{I} = \beta = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} s$.

Доказательство. Докажем первое предельное равенство, второе доказывается аналогично. Пусть $\overline{I} = \inf\limits_T \{S\}$, тогда согласно определению нижней грани числового множества: **а**) для любого разбиения T прямоугольника R выполняется неравенство $S_T \geq \overline{I}$ и **б**) для любого $\epsilon > 0$ существует разбиение T_1 прямоугольника R такое, что $S_{T_1} < \overline{I} + \dfrac{\epsilon}{2}$ или $0 \leq S_{T_1} - \overline{I} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Введем обозначения: p — количество прямых разбиения T_1 (без учета сторон прямоугольника R), $M = \sup\limits_R f(x, y)$, $m = \inf\limits_R f(x, y)$, $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{2p(M - m)D}$, D — диагональ прямоугольника R.

Пусть T — произвольное разбиение мелкости $\Delta_T < \delta_\epsilon$ и S_T — его верхняя интегральная сумма Дарбу. Построим теперь разбиение $T' = T \cup T_1$. Очевидно разбиение T' является измельчением для T, поэтому для его верхней интегральной суммы Дарбу S' по следствию из свойства 3 имеем оценку

$$0 \leq S_T - S' \leq (M - m) \cdot p \cdot \Delta_T \cdot D < \frac{\epsilon}{2}.$$

С другой стороны, T' является измельчением и для разбиения T_1, поэтому

$$\overline{I} \leq S' \leq S_{T_1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq S' - \overline{I} \leq S_{T_1} - \overline{I} < \frac{\epsilon}{2},$$

таким образом,

$$S_T - \overline{I} = S_T - S' + S' - \overline{I} < \epsilon.$$

Лемма Дарбу доказана.

14.3. Критерии интегрируемости Дарбу и Римана. Классы функций, интегрируемых по Риману

Теорема (критерий интегрируемости Дарбу). *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике R функция $f(x,y)$ была интегрируемой на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\overline{I} = \underline{I}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике R, тогда существует предел

$$I = \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(f, T, \xi, \eta),$$

т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T прямоугольника R, мелкость которого $\Delta_T < \delta_\epsilon$, и для любого выбора точек (ξ_i, η_j) выполняется неравенство $|\sigma(f,T,\xi,\eta) - I| < \dfrac{\epsilon}{4}$. По свойству 2 интегральных сумм Дарбу для $\epsilon > 0$ и разбиения T можно так осуществить выбор точек (ξ_i', η_j') и (ξ_i'', η_j''), чтобы выполнялись неравенства

$$S - \sigma(f,T,\xi',\eta') < \frac{\epsilon}{4}, \qquad \sigma(f,T,\xi'',\eta'') - s < \frac{\epsilon}{4},$$

здесь S и s — интегральные суммы Дарбу для разбиения T, причем очевидно

$$\Big|I - \sigma(f,T,\xi',\eta')\Big| < \frac{\epsilon}{4}, \qquad \Big|I - \sigma(f,T,\xi'',\eta'')\Big| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Отсюда получаем

$$S - s = \Big(S - \sigma(f,T,\xi',\eta')\Big) + \Big(\sigma(f,T,\xi',\eta') - I\Big) +$$
$$+ \Big(I - \sigma(f,T,\xi'',\eta'')\Big) + \Big(\sigma(f,T,\xi'',\eta'') - s\Big),$$

т. е.

$$|S - s| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Поскольку для произвольного разбиения T справедливо тройное неравенство $s \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S$, то $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S - s < \epsilon$, а значит в силу произвольности выбора $\epsilon > 0$ получаем $\overline{I} = \underline{I}$.

Достаточность. Пусть $\overline{I} = \underline{I} = I$, $\overline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S$, $\underline{I} = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} s$, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T прямоугольника R, мелкость которого $\Delta_T < \delta_\epsilon$, выполняются неравенства

$$0 < \underline{I} - s = I - s < \epsilon, \qquad 0 < S - \overline{I} = S - I < \epsilon.$$

Отсюда получаем $I - \epsilon < s$, $S < I + \epsilon$. Поскольку для любого выбора точек (ξ_i, η_j) выполняется неравенство

$$I - \epsilon < s \leq \sigma(f, T, \xi, \eta) \leq S < I + \epsilon,$$

то $|\sigma(f, T, \xi, \eta) - I| < \epsilon$, т. е. существует предел

$$I = \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(f, T, \xi, \eta),$$

а значит $f(x, y)$ интегрируема на прямоугольнике R. **Теорема доказана.**

Как следствие из критерия Дарбу, получаем следующее утверждение.

Теорема (критерий интегрируемости Римана). *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ была интегрируемой на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало разбиение T прямоугольника R такое, что $S - s < \epsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x, y)$ интегрируема на прямоугольнике R. При доказательстве критерия Дарбу (необходимости) было показано, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T прямоугольника R, мелкость которого $\Delta_T < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $S - s < \epsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого $\epsilon > 0$ существует разбиение T прямоугольника R такое, что $S - s < \epsilon$, тогда в силу тройного неравенства $s \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S$ получаем $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S - s < \epsilon$. Отсюда в силу произвольности $\epsilon > 0$ получаем $\overline{I} = \underline{I}$, что в силу критерия Дарбу и означает интегрируемость функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R. **Теорема доказана.**

Выделим теперь некоторые классы функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна (по совокупности переменных) на прямоугольнике R, то $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике R.*

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна (по совокупности переменных) на прямоугольнике R, тогда (по теореме Кантора) $f(x, y)$ равномерно непрерывна на R, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любых двух точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R$, таких что $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство

$$\Big| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \Big| < \frac{\epsilon}{(b - a)(d - c)}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение T прямоугольника R мелкости $\Delta_T < \delta_\epsilon$, тогда для интегральных сумм Дарбу S и s, соответствующих этому T, справедливо неравенство

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} <$$

$$< \frac{\epsilon}{(b - a)(d - c)} \cdot (b - a)(d - c) = \epsilon.$$

Отсюда в силу критерия Римана **теорема 1 доказана.**

Для выделения еще одного класса интегрируемых функций потребуются следующие понятия.

Определение. *Элементарной фигурой* (*множеством*) плоскости называется множество точек, представляющее собой объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат Ox и Oy.

Определение. Говорят, что функция $f(x, y)$ обладает в прямоугольнике R (в замкнутой области D) *I-свойством*, если:

а) $f(x, y)$ ограничена на R (на D);

б) для любого $\epsilon > 0$ существует элементарная фигура площади меньшей ϵ, содержащая все точки и линии разрывов функции $f(x, y)$ (т. е. множество точек разрывов функции $f(x, y)$ в R (в D) имеет меру ноль).

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ обладает в прямоугольнике R I-свойством, то $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике R.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ произвольно и $M = \sup\limits_R f(x, y)$, $m = \inf\limits_R f(x, y)$, $M > m$, покроем все линии и точки разрыва элементарной фигурой площади меньше $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2(M - m)}$. Элементарная фигура разбила R на непересекающиеся сегменты, на каждом из которых функция $f(x, y)$ непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на них, т. е. существует такое $\delta_\epsilon > 0$, что если точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) принадлежат одному сегменту и $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_\epsilon$, то

$$\Big|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\Big| < \frac{\epsilon}{2(b - a)(d - c)}.$$

Рассмотрим разбиения *сегментов* с мелкостью, не превосходящей $\delta_\epsilon > 0$. Эти разбиения в совокупности с элементарным множеством индуцирует разбиение прямоугольника R, для которого

$$S - s = \sum_{i=1}^{\dots} \sum_{j=1}^{\dots} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\prime} \sum_{j=1}^{\prime} + \sum_{i=1}^{\prime\prime} \sum_{j=1}^{\prime\prime} \right) (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij},$$

здесь $\sum\limits_{i=1}^{\prime} \sum\limits_{j=1}^{\prime}$ — суммирование осуществляется по R_{ij} из элементарного множества, $\sum\limits_{i=1}^{\prime\prime} \sum\limits_{j=1}^{\prime\prime}$ — суммирование по R_{ij} из сегментов. Рассмотрим эти блоки слагаемых в отдельности:

$$\sum_{i=1}^{\prime} \sum_{j=1}^{\prime} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} \le (M - m) \sum_{i=1}^{\prime} \sum_{j=1}^{\prime} \Delta R_{ij} < \frac{\epsilon}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{\prime\prime} \sum_{j=1}^{\prime\prime} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} < \frac{\epsilon}{2(b-a)(d-c)} \sum_{i=1}^{\prime} \sum_{j=1}^{\prime} \Delta R_{ij} \le \frac{\epsilon}{2},$$

тогда $S - s < \epsilon$, что в силу критерия Римана и означает интегрируемость функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R. **Теорема 2 доказана.**

Пример. Пусть $R \equiv [-1; 1] \times [-1; 1]$, $f(x, y) = \operatorname{sgn} \sin \dfrac{1}{y}$. Эта функция имеет конечные скачки по линиям $y_k = \dfrac{1}{\pi k}$. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и покроем ось Ox полосой ширины $\dfrac{\epsilon}{2}$, $\left(-\dfrac{\epsilon}{4} < y < \dfrac{\epsilon}{4} \right)$, вне ее находится конечное число линий разрыва функции $f(x, y)$, обозначим их количество n_ϵ. Покроем каждую из этих линий полосой ширины $\dfrac{\epsilon}{2n_\epsilon}$, $\left(\dfrac{1}{\pi k} - \dfrac{\epsilon}{4n_\epsilon} < y < \dfrac{1}{\pi k} + \dfrac{\epsilon}{4n_\epsilon} \right)$. Тогда все точки и линии разрыва функции $f(x, y)$ покрыты элементарным множеством площади $\dfrac{\epsilon}{2} + n_\epsilon \dfrac{\epsilon}{2n_\epsilon} = \epsilon$, что согласно теореме 2 и означает интегрируемость функции $f(x, y)$ на квадрате $R \equiv [-1; 1] \times [-1; 1]$.

14.4. Определение двойного интеграла для произвольной области. Свойства двойного интеграла

Предварительно введем несколько терминов. *Простой замкнутой кривой* на плоскости называется множество точек $M(x,y)$, координаты которых определяются парой функций $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условиям: а) $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$; б) при $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ либо $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$, т. е. разным значениям параметра t соответствуют разные точки кривой. *Верхней площадью* плоской фигуры, ограниченной простой замкнутой кривой, называется нижняя грань площадей всех многоугольников, содержащих фигуру, а *нижней площадью* — верхняя грань площадей всех многоугольников, содержащихся внутри фигуры. Плоскую фигуру называют *квадрируемой*, если равны между собой ее верхняя и нижняя площади, а их общее значение называют *площадью* плоской фигуры. Все эти понятия можно перенести без каких-либо изменений на произвольные ограниченные множества точек плоскости. Говорят, что кривая Γ имеет *площадь нуль* (*меру нуль*), если для любого $\epsilon > 0$ существует элементарная фигура, содержащая кривую Γ и имеющая площадь меньше ϵ.

Пусть D — замкнутая ограниченная область, граница Γ которой имеет площадь нуль, $f(x,y)$ — ограниченная функция, определенная на D, R — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащий область D. Определим в R новую функцию по правилу

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Определение. Функцию $f(x,y)$ называют *интегрируемой* в области D, если $F(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике R, при этом число $I = \iint\limits_R F(x,y)\,dx\,dy$ называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначают

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_R F(x, y)\, dx\, dy.$$

Из этого определения вытекает следующая

Лемма (геометрический смысл двойного интеграла). *Пусть $f(x, y) \geq 0$ на D и обладает I-свойством на D, тогда значение интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ равно объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, цилиндрической поверхностью с направляющей ∂D и плоскостью XoY.*

Доказательство. Пусть $D \subset R$, осуществим разбиение R, тогда верхние интегральные суммы Дарбу представляют собой сумму объемов параллелепипедов, полностью содержащих в себе тело, а нижние интегральные суммы Дарбу — сумму объемов параллелепипедов, либо полностью содержащихся внутри тела, либо «выступающих» за его пределы, к последним относятся те, у которых основание R_{ij} содержит часть границы ∂D, или точки, или линии разрыва функции $f(x, y)$, но в силу I-свойства сумма этих объемов не превосходит $M \cdot \epsilon$, $M = \sup\limits_R f(x, y)$. Интегрируемость $F(x, y)$ следует из I-свойства этой функции, так как к линиям разрыва функции $f(x, y)$ в D добавилась граница области ∂D, а значит двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ существует и равен общему пределу верхних и нижних интегральных сумм Дарбу, геометрический смысл которых описан выше. **Лемма доказана.**

Следствие 1. *Значение интеграла $\iint\limits_D dx\, dy$ равно площади D.*

Следствие 2. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в ограниченной квадрируемой области на D, T — разбиение области D, R^*_{ij} — прямоугольники разбиения, целиком содержащиеся в D, тогда интегральные суммы*

$$\sum_{R^*_{ij}} f(\xi_i,\eta_j)\Delta R_{ij}, \quad \sum_{R^*_{ij}} m_{ij}\Delta R_{ij}, \quad \sum_{R^*_{ij}} M_{ij}\Delta R_{ij}$$

при $\Delta_T \to 0$ имеют общий предел, равный $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Доказательство. Так как граница области D имеет меру нуль, то рассматриваемые суммы отличаются от обычных сумм Римана и Дарбу отсутствием слагаемых по квадратам, имеющим общие точки с границей области D, причем сумма отсутствующих слагаемых по модулю не превосходит величины $M \cdot \epsilon$, $M = \sup\limits_R f(x,y)$, где $\epsilon > 0$ — суммарная площадь квадратов, покрывающих границу области ∂D. **Следствие 2 доказано.**

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ обладает I-свойством в области D, то она интегрируема в этой области.*

Доказательство. Функция $F(x,y)$ обладает I-свойством, так как ее множество точек и линий разрыва состоит из объединения такого множества функции $f(x,y)$ и границы области ∂D, имеющей нулевую меру. Поэтому согласно теореме 2 предыдущего параграфа $F(x,y)$ интегрируема на R, т. е. $f(x,y)$ интегрируема на D. **Теорема доказана.**

Следствие 1. *Если функция $f(x,y)$ обладает I-свойством в области D, а функция $g(x,y)$ ограничена и совпадает с $f(x,y)$ всюду на D, за исключением множества точек меры нуль, то $g(x,y)$ также интегрируема на D и*

$$\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Замечание. В сформулированном определении интегрируемости функции по области имеется некоторый произвол, а именно зависимость от выбранной системы координат и выбора прямоугольника R, поэтому необходимо доказать независимость значения двойного интеграла от такого выбора. Доказывается это с использованием следующего (более общего) определения двойного интеграла.

Пусть D — замкнутая ограниченная область с границей ∂D, имеющей площадь (меру) нуль. Разобьем область D при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль на конечное число n частичных областей D_1, D_2, ..., D_n. Каждая из частичных областей D_i имеет границу меры нуль и поэтому квадрируема, пусть ΔD_i — ее площадь, $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, число

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(f, T, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\xi_i, \eta_j) \Delta D_i$$

называют *интегральной суммой Римана* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению T области D и данному выбору точек (ξ_i, η_i) на частичных областях D_i. *Диаметром* разбиения T (или его *мелкостью*) называют величину

$$\tilde{\Delta}_T = \max_{1 \le i \le n} \sup_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_i} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

В этих терминах дадим общее определение.

Определение. Число $\tilde{I}$ называют *пределом интегральных сумм Римана* $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta}_T \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T области D на частичные области D_i, мелкость которого $\tilde{\Delta}_T < \delta_\epsilon$, и для любого выбора точек (ξ_i, η_i) на D_i выполняется неравенство $|\tilde{\sigma} - \tilde{I}| < \epsilon$, это число называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D, а саму функцию *интегрируемой* по Риману на этой области.

Теорема. *Сформулированные определения интегрируемости эквивалентны.*

Доказательство. Здесь докажем только, что из общего определения следует первое. Пусть $f(x,y)$ интегрируема в области D согласно общему определению и ее двойной интеграл равен I. Заключим область D в прямоугольник R, введем на R функцию $F(x,y)$, осуществим разбиение T прямоугольника R на частичные прямоугольники и составим для $F(x,y)$ интегральную сумму $\sigma(F,T,\xi,\eta)$. Рассмотрим теперь интегральную сумму $\tilde{\sigma}(f,T,\xi,\eta)$ для $f(x,y)$ (соответствующую тому же разбиению T). Суммы $\sigma(F,T,\xi,\eta)$ и $\tilde{\sigma}(f,T,\xi,\eta)$ отличаются слагаемыми, соответствующими частичным прямоугольникам разбиения, имеющими общие точки с границей области ∂D площади (меры) нуль, т. е. в силу ограниченности $f(x,y)$ их отличие не превосходит величины $M\cdot\epsilon$, $M=\sup\limits_R f(x,y)$, где $\epsilon>0$ — суммарная площадь частичных прямоугольников, покрывающих границу области ∂D. Таким образом, суммы $\sigma(F,T,\xi,\eta)$ и $\tilde{\sigma}(f,T,\xi,\eta)$ имеют общий предел I при стремлении к нулю мелкости разбиения, что и означает интегрируемость функции $f(x,y)$ в смысле первого определения. **Теорема доказана.**

Свойства двойного интеграла

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам однократного интеграла. Приведем их, опустив доказательства.

Свойство 1 (аддитивность). *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D и область D при помощи кривой Γ меры (площади) нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x,y)$ интегрируема на каждой из областей D_1 и D_2, причем*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Справедливо и обратное утверждение: *из интегрируемости функции $f(x, y)$ в каждой из областей D_1 и D_2 следует ее интегрируемость в области D и справедливость приведенной формулы.*

Свойство 2 (линейность). *Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, α и β — произвольные вещественные числа, то функция $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$ интегрируема в области D, причем*

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy =$$
$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Свойство 3. *Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, то их произведение $f(x,y) \cdot g(x,y)$ интегрируемо в области D.*

Свойство 4. *Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D и в этой области выполняется неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$, то*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Свойство 5. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то в этой области интегрируема функция $|f(x,y)|$ и выполняется неравенство, причем*

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Пример. Обратное утверждение неверно. Действительно, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально;} \\ -1, & x \text{ — иррационально} \end{cases}$$

не интегрируема, тогда как $|f(x,y)| \equiv 1$ интегрируема по любой области D.

Свойство 6. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, функция $g(x,y)$ ограничена и совпадает с $f(x,y)$ всюду в области D, за исключением множества точек меры нуль, то $g(x,y)$ интегрируема в области D.*

Свойство 7 (теорема о среднем значении). *Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, функция $g(x,y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в области D, $M = \sup\limits_D f(x,y)$, $m = \inf\limits_D f(x,y)$, то найдется число $\mu \in [m, M]$ такое, что выполняется равенство*

$$\iint\limits_D f(x,y) \cdot g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Если при этом функция $f(x,y)$ непрерывна в связной области D, то в области найдется такая точка (ξ, η), что $\mu = f(\xi, \eta)$.

14.5. Сведение двойного интеграла к повторному

Для вычисления двойных интегралов, естественно, используют не определение, а метод сведения к повторному (однократному) интегралу. Как и выше рассмотрим случаи прямоугольной и произвольной областей.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в прямоугольнике $R \equiv \{(x;y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и при любом $x \in [a,b]$ существует однократный интеграл (зависящий от параметра) $\mathcal{I}(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, тогда существует (повторный) интеграл*

$$\int\limits_a^b \mathcal{I}(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. Осуществим разбиение прямоугольника на частичные R_{ij}, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,k$, Δ_T — мелкость разбиения, $m_{ij} = \inf\limits_{R_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{R_{ij}} f(x,y)$, тогда для любого $(x,y) \in R_{ij}$ выполняется неравенство $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$, поэтому для любого $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполнено неравенство

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \le M_{ij}\Delta y_j,$$

из которого, в свою очередь, следует оценка

$$s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy\,\Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j = S,$$

где

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,dy\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathcal{I}(\xi_i)\Delta x_i$$

— интегральная сумма Римана функции $\mathcal{I}(x)$. В силу интегрируемости функции $f(x,y)$ в прямоугольнике существуют и равны пределы интегральных сумм Дарбу при

$\Delta_T \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta_T \to 0} s = \lim_{\Delta_T \to 0} S = \iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Поэтому существует предел интегральной суммы Римана функции $\mathcal{I}(x)$, равный этому же значению, т. е. справедливо равенство

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\Delta_T \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int\limits_a^b \mathcal{I}(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть область D проецируется на ось Ox в отрезок $[x_1, x_2]$, любая прямая $x = \text{const}$, $x \in [x_1, x_2]$, параллельная оси Oy, пересекает область D по отрезку $[y_1(x), y_2(x)]$, функция $f(x,y)$ интегрируема в области D и для любого $x \in [x_1, x_2]$ существует однократный интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, тогда существует (повторный) интеграл и справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. Пусть прямоугольник R содержит область D, введем функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Для этой функции выполнены все условия теоремы 1, поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_R F(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Теорема 2 доказана.

14.6. Замена переменных в двукратном интеграле

Пусть D — квадрируемая область плоскости и функция $f(x,y)$ интегрируема в области D. Предположим, что от переменных (x,y) требуется перейти к новым переменным (x_1,y_1) с помощью обратимого преобразования $\Psi : (x_1,y_1) \to (x,y)$, задаваемого координатными функциями

$$x = x(x_1,y_1), \qquad y = y(x_1,y_1). \tag{1}$$

Обозначим через D' область плоскости, которая этим преобразованием переводится в D.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *преобразование $\Psi : D' \to D$, задаваемое координатными функциями* (1), *является взаимнооднозначным*;

б) *координатные функции* (1) *являются гладкими, т. е.* $x(x_1,y_1)$, $y(x_1,y_1) \in C^1(D')$;

в) *отображение Ψ локально обратимо* (*см. § 8.7*), *т. е.* $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x_1,y_1)} \neq 0$,

тогда для любой интегрируемой в области D функции $f(x,y)$ справедлива формула замены переменных

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D'} f(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(x_1,y_1)}\right| dx_1\, dy_1. \qquad (2)$$

Доказательство проведем в два этапа. Вначале докажем формулу (2) для линейного преобразования, а затем в общем случае.

1 (линейный случай). Пусть преобразование (1) линейное невырожденное, т. е. координатные функции (1) имеют вид

$$x = a_{11}x_1 + a_{12}y_1; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3)$$
$$y = a_{21}x_1 + a_{22}y_1,$$

тогда якобиан отображения (3) совпадает с его матрицей

$$T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x_1,y_1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det T \neq 0.$$

Наряду с T рассмотрим элементарные преобразования, задаваемые матрицами,

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det T_{12} = \det T_{21} = 1 \neq 0$$

и

$$T_1^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0,$$

$$\det T_1^\lambda = \det T_2^\lambda = \lambda \neq 0.$$

Известно, что всякое невырожденное линейное преобразование T представимо (вообще говоря не единственным образом) в виде конечной суперпозиции элементарных преобразований указанного типа (см., например, Кострикин А. И. Введение в алгебру. М. : Наука, 1977. с. 100, Гл. 2, § 4, следствие к теореме 5), поэтому достаточно доказать теорему для элементарных преобразований.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, тогда для преобразований T_{ij} и T_i^λ формула* (2) *справедлива.*

Доказательство. Пусть $\overline{D} \subset R \equiv \{(x;y): \ a \le x \le b, c \le y \le d\} \equiv [a,b] \times [c,d]$ и

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \overline{D}; \\ 0, & (x,y) \in R \setminus \overline{D}, \end{cases}$$

тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{для } T_2^\lambda, \ \lambda > 0, \\ x = x_1, \\ y = \lambda y_1 \end{array} \right\} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\frac{c}{\lambda}}^{\frac{d}{\lambda}} F(x_1, \lambda y_1)\lambda\,dy_1 \right) dx_1 =$$

$$= \lambda \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\frac{c}{\lambda}}^{\frac{d}{\lambda}} F(x_1, \lambda y_1)\,dy_1 \right) dx_1 = \lambda \iint\limits_{D'} f(x_1, \lambda y_1)\,dy_1\,dx_1.$$

Здесь $\lambda > 0$ — модуль определителя якобиана преобразования T_2^λ. Преобразование $T_2^\lambda : R' \to R$ переводит прямоугольник $R' \equiv [a,b] \times \left[\dfrac{c}{\lambda}, \dfrac{d}{\lambda}\right]$ в R, осуществляя растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом растяжения $\lambda > 0$. Если $\lambda < 0$, то преобразование T_2^λ осуществляет растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом растяжения $|\lambda|$ в суперпозиции с осевой симметрией относительно оси Ox. В этом случае после перестановки пределов интегрирования во внутреннем интеграле множитель $(-\lambda)$ совпадет с модулем определителя якобиана преобразования T_2^λ. Для преобразования T_1^λ проводятся аналогичные рассуждения.

Для элементарных преобразований второго типа имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{для } T_{21}, \\ x = x_1, \\ y = x_1 + y_1 \end{array} \right\} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{c-x_1}^{d-x_1} F(x_1, x_1 + y_1)\,dy_1 \right) dx_1 =$$

$$= \iint\limits_{D'} f(x_1, x_1 + y_1)\,dy_1\,dx_1,$$

т. е. формула (2) справедлива и для элементарных преобразований второго типа. Здесь преобразование $T_{21} : R' \to R$ переводит параллелограмм R', ограниченный прямыми $x_1 = a$, $x_1 = b$, $x_1 + y_1 = c$, $x_1 + y_1 = d$, в прямоугольник R. Итак, для элементарных преобразований формула (2) полностью доказана. **Лемма 1 доказана.**

Отсюда, как следствие, вытекает

Лемма 2. *Для любого невырожденного линейного преобразования T и непрерывной функции $f(x,y)$ формула* (2) *справедлива.*

Действительно, поскольку формула (2) справедлива для элементарных преобразований и любое невырожденное линейное преобразование T представимо в виде суперпозиции элементарных, то формула (2) справедлива и для T, так как модуль определителя якобиана $|\det T|$ равен (в силу теоремы о дифференцировании сложной функции см. § 8.2) произведению модулей якобианов элементарных преобразований.

Следствие. *Если область D квадрируема и T произвольное невырожденное линейное преобразование, то площади области D и ее образа $T(D)$ связаны равенством $S_{T(D)} = |\det T| S_D$.*

Для доказательства необходимо подставить в формулу (2) $f(x, y) \equiv 1$ и вспомнить геометрический смысл двойного интеграла (см. следствие 1 из леммы § 14.4).

2 (нелинейный случай). Далее будем обозначать через:

$J_\Psi(x_1, y_1) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)}$ якобиан отображения (1) в точке (x_1, y_1);

$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\| = \|(x_1, y_1)\| = \max(|x_1|, |y_1|)$ — норму вектора;

$\|A\| = \max(|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|)$ — норму матрицы, которые связаны между собой неравенством

$$\left\| A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\| \le \|A\| \cdot \|(x_1, y_1)\|.$$

Лемма 3 (о площади образа). *Пусть выполнены условия теоремы, тогда*

а) *площадь образа $S_{\Psi(C)}$ квадрата $C \subset D'$ с центром в точке (x_0, y_0) при отображении Ψ удовлетворяет неравенству*

$$S_{\Psi(C)} \le \left(\max_{(x_1, y_1) \in C} \|J_\Psi(x_1, y_1)\| \right)^2 \cdot S_C;$$

б) *площадь образа $S_{\Psi(G)}$ квадрируемой области $G \subset D'$ при отображении Ψ удовлетворяет неравенству*

$$S_{\Psi(G)} \le \iint\limits_G |\det J_\Psi(x_1, y_1)| \, dx_1 \, dy_1.$$

Доказательство. а) Пусть длина стороны квадрата $C \subset D'$ равна $2l$, тогда для любой точки $(x_1, y_1) \in C$ выполняется неравенство $\|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| \le l$. В силу формулы Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа (см. § 8.5) имеем:

для приращений координатных функций преобразования Ψ следующее представление:

$$x(x_1,y_1) - x(x_0,y_0) = dx(\bar{c})\Big|_{d\bar{x}=\Delta\bar{x}} =$$

$$= \frac{\partial x(\bar{c})}{\partial x_1}(x_1 - x_0) + \frac{\partial x(\bar{c})}{\partial y_1}(y_1 - y_0),$$

$$y(x_1,y_1) - y(x_0,y_0) = dy(\bar{c_1})\Big|_{d\bar{x}=\Delta\bar{x}} =$$

$$= \frac{\partial y(\bar{c_1})}{\partial x_1}(x_1 - x_0) + \frac{\partial y(\bar{c_1})}{\partial y_1}(y_1 - y_0),$$

где

$$\bar{c} = (x_0,y_0) + \theta((x_1,y_1) - (x_0,y_0)),$$

$$\bar{c_1} = (x_0,y_0) + \theta_1((x_1,y_1) - (x_0,y_0)), \quad 0 < \theta, \theta_1 < 1.$$

Отсюда получаем оценки

$$|x(x_1,y_1) - x(x_0,y_0)| \le \left(\left|\frac{\partial x(\bar{c})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial x(\bar{c})}{\partial y_1}\right| \right) \cdot l \le$$

$$\le \|J_\Psi(\bar{c})\| \cdot l \le \max_C \|J_\Psi\| \cdot l,$$

$$|y(x_1,y_1) - y(x_0,y_0)| \le \left(\left|\frac{\partial y(\bar{c_1})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial y(\bar{c_1})}{\partial y_1}\right| \right) \cdot l \le$$

$$\le \|J_\Psi(\bar{c_1})\| \cdot l \le \max_C \|J_\Psi\| \cdot l.$$

Таким образом,

$$\|\Psi(x_1,y_1) - \Psi(x_0,y_0)\| =$$

$$= \max(|x(x_1,y_1) - x(x_0,y_0)|, |y(x_1,y_1) - y(x_0,y_0)|) \le$$

$$\le \max_C \|J_\Psi\| \cdot l,$$

т. е. если точка (x_1,y_1) находится в квадрате C с центром в точке (x_0,y_0), то ее образ точка $\Psi(x_1,y_1)$ находится в квадрате с центром в точке $\Psi(x_0,y_0)$ и ребром $2l \cdot \max\limits_C \|J_\Psi\|$. Но множество $\Psi(C)$ вложено в этот новый квадрат, поэтому его площадь удовлетворяет неравенству

$$S_{\Psi(C)} \leq S_{\text{нов. квадр.}} = 4l^2 \left(\max_C \|J_\Psi(x_1, y_1)\|\right)^2 =$$

$$= \left(\max_C \|J_\Psi(x_1, y_1)\|\right)^2 \cdot S_C.$$

б) Пусть C — квадрат в D' и T — произвольное невырожденное линейное преобразование, тогда для его образа $\Psi(C)$ справедливо представление $\Psi(C) = TT^{-1}\Psi(C)$, поэтому в силу следствия из леммы 2 и первой части доказываемой леммы 3 последовательно получаем

$$S_{\Psi(C)} = S_{TT^{-1}\Psi(C)} = |\det T| S_{T^{-1}\Psi(C)} \leq$$

$$\leq |\det T| \left(\max_C \|J_{T^{-1}\Psi}(x_1, y_1)\|\right)^2 \cdot S_C =$$

$$= |\det T| \left(\max_C \|J_{T^{-1}} \cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|\right)^2 \cdot S_C =$$

$$= |\det T| \left(\max_C \|T^{-1} \cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|\right)^2 \cdot S_C.$$

Осуществим разбиение плоскости квадратами со стороной h — достаточно малой, чтобы в области $G \subset D'$ могло бы уместиться некоторое (конечное) количество таких квадратов. Обозначим их C_1, C_2, ..., $C_{m(h)}$, $G_h = \bigcup\limits_{i=1}^{m(h)} C_i \subset \subset G \subset D'$. В каждом таком квадрате выберем точку $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in C_i$ и запишем для каждого квадрата C_i полученное выше неравенство, в котором положим $T \equiv J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, получим

$$S_{\Psi(C_i)} \leq |\det J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)| \left(\max_{C_i} \|J_\Psi^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|\right)^2 S_{C_i}.$$

По условиям теоремы элементы якобиана $J_\Psi(x_1, y_1)$ являются функциями, непрерывными по совокупности переменных в области D', поэтому непрерывными в G будут как определитель $\det J_\Psi(x_1, y_1)$, так и функция $\|J_\Psi^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\cdot$ $\cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|^2$. Поскольку $\|J_\Psi^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\|^2 =$ $= \|I\|^2 = 1$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любой точки $(x_1, y_1) \in G$, удовлетворяющей условию $\sqrt{(x_1 - \tilde{x}_i)^2 + (y_1 - \tilde{y}_i)^2} < \delta_\epsilon$, выполняются неравенства $0 \le \|J_\Psi^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|^2 < 1 + \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, m(h)$. Выбирая теперь $h < \delta_\epsilon$ для всех $i = 1, \ldots, m(h)$, получаем $\max\limits_{C_i} \|J_\Psi^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot J_\Psi(x_1, y_1)\|^2 \le 1 + \epsilon$ или $S_{\Psi(C_i)} \le$ $\le |\det J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)| \cdot (1 + \epsilon) \cdot S_{C_i}$. Просуммировав все эти неравенства по $i = 1, \ldots, m(h)$, получим

$$S_{\Psi(G_h)} \le (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^{m(h)} |\det J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)| \cdot S_{C_i},$$

но при $h \to 0 \quad S_{\Psi(G_h)} \to S_{\Psi(G)}$ и

$$\sum_{i=1}^{m(h)} |\det J_\Psi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)| \cdot S_{C_i} \quad \to \quad \iint\limits_G |\det J_\Psi(x_1, y_1)|\, dx_1\, dy_1.$$

Лемма 3 доказана.

Приступим теперь к доказательству собственно теоремы.

Лемма 4. *Если выполнены условия теоремы и $f(x, y) \ge 0$, то формула* (2) *справедлива.*

Доказательство. Осуществим разбиение плоскости квадратами со стороной h, достаточно малой, чтобы в области D уместилось некоторое (конечное) количество таких квадратов C_1, C_2, $\ldots$, $C_{m(h)}$. Пусть $G_i \equiv \Psi^{-1}(C_i) \subset$ $\subset D'$ — их прообразы при отображении Ψ. Для каждого из квадратов запишем неравенство из леммы 3

$$S_{C_i} \le \iint\limits_{G_i} |\det J_\Psi(x_1, y_1)|\, dx_1\, dy_1.$$

Пусть $0 \le m_i = \inf\limits_{C_i} f(x,y) = \inf\limits_{G_i} f(\Psi(x_1,y_1))$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m(h)} m_i \cdot S_{C_i} \le \sum_{i=1}^{m(h)} m_i \cdot \iint\limits_{G_i} |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1.$$

Но по теореме о среднем для двойного интеграла (см. свойство 7 из § 14.4)

$$\iint\limits_{G_i} f(\Psi(x_1,y_1))\, |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1 =$$

$$= \mu_i \iint\limits_{G_i} |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1,$$

где $0 \le m_i \le \mu_i \le M_i = \sup\limits_{C_i} f(x,y) = \sup\limits_{G_i} f(\Psi(x_1,y_1))$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{m(h)} m_i \cdot S_{C_i} \le \sum_{i=1}^{m(h)} \mu_i \cdot \iint\limits_{G_i} |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m(h)} \iint\limits_{G_i} f(\Psi(x_1,y_1))\, |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1.$$

По следствию 2 из леммы о геометрическом смысле двойного интеграла (см. § 14.4) при $h \to 0$

$$\sum_{i=1}^{m(h)} m_i \cdot S_{C_i} \;\to\; \iint\limits_{D} f(x,y)\, dx\, dy,$$

$$\sum_{i=1}^{m(h)} \iint\limits_{G_i} f(\Psi(x_1,y_1))\, |\det J_\Psi(x_1,y_1)|\, dx_1\, dy_1 \;\to$$

$$\to \iint_{D'} f(\Psi(x_1, y_1))\, |\det J_\Psi(x_1, y_1)|\, dx_1\, dy_1,$$

поэтому

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \le$$

$$\le \iint_{D'} f(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1))\, |\det J_\Psi(x_1, y_1)|\, dx_1\, dy_1.$$

Поменяв теперь в этих рассуждениях области D и D' ролями и рассмотрев функцию $f(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) \cdot |\det J_\Psi(x_1, y_1)|$, получим неравенство обратного знака, что и завершает доказательство формулы (2) для неотрицательной функции. **Лемма 4 доказана.**

Пусть теперь $f(x, y)$ — произвольная интегрируемая на области D функция, а значит в силу необходимого условия интегрируемости ограничена на D, т. е. существует $M \ge 0$ такая, что $|f(x, y)| \le M$. Рассмотрим две вспомогательные неотрицательные функции $f_1(x, y) \equiv M$ и $f_2(x, y) = M - f(x, y) \ge 0$, для которых формула (2) уже доказана в лемме 4. Отсюда в силу свойства линейности интеграла получаем формулу (2) для функции $f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$. **Теорема доказана.**

Изложенная теория двойного интеграла без каких-либо осложнений и новых идей переносится на случай тройного и n-кратного интегралов.

15. Криволинейные и поверхностные интегралы

15.1. Определения криволинейных интегралов первого и второго рода

Рассмотрим на плоскости R^2 (в пространстве R^3) некоторую гладкую кривую L, не имеющую точек самопересечения или участков самоналегания. Предположим, что кривая определяется параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ $(z = \chi(t))$, $a \le t \le b$, $\varphi(t)$, $\phi(t)$, $\chi(t) \in C^1[a,b]$, точки $A(\varphi(a), \phi(a))$ и $B(\varphi(b), \phi(b))$ являются ее началом и концом соответственно (в R^3 эти точки естественно имеют три координаты).

Пусть на плоской кривой L определены три функции $f(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ (на пространственной кривой четыре функции $f(x,y,z)$, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$), каждая из которых непрерывна вдоль L.

Осуществим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0 < < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, тогда кривая L распадается на частичные дуги $\breve{M_0M_1}$, $\breve{M_1M_2}$, $\ldots$, $\breve{M_{n-1}M_n}$, где $M_k(x_k, y_k)$, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \phi(t_k)$. Длина дуги $\breve{M_{k-1}M_k}$ равна

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dt.$$

Диаметром разбиения кривой L называют число $\Delta = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$. Выберем на каждой частичной дуге $\breve{M_{k-1}M_k}$ точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \phi(\tau_k)$, $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$ и составим интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k, \quad \sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k,$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

В случае пространственной кривой мы можем составить четыре таких суммы, при этом

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt,$$

$$\sigma_4 = \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k.$$

Определение. Числа I_i называют *пределами* интегральных сумм σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, при $\Delta \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L мелкости $\Delta < \delta_\epsilon$ и для любого выбора точек $N_k(\xi_k, \eta_k)$ (или $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$) выполняется неравенство $|\sigma_i - I_i| < \epsilon$.

Если такие пределы существуют и конечны, то предел $I_1 = \lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma_1$ называют *криволинейным интегралом первого рода* и обозначают

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl,$$

пределы $I_i = \lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma_i$, $i = 2, 3, 4$, называют *криволинейными интегралами второго рода* и обозначают

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx,$$

$$\int\limits_L Q(x, y)\, dy \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy,$$

$$\int\limits_L R(x, y, z)\, dz \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} R(x, y, z)\, dz.$$

Суммы интегралов

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

или

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

называют *общими криволинейными интегралами второго рода.*

Замечание 1. Из определения криволинейных интегралов вытекает, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода кривой AB, а для интеграла второго рода изменение направления обхода кривой приводит к изменению знака, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

так как $x_k - x_{k-1} = -(x_{k-1} - x_k)$, $y_k - y_{k-1} = -(y_{k-1} - y_k)$.

Замечание 2. Значения криволинейных интегралов не зависят от параметризации кривой, так как от нее не зависят интегральные суммы.

Замечание 3. Если вдоль кривой L одна из координат постоянна, например $x = \varphi(t) \equiv \mathrm{Const}$, то $\int\limits_L P(x,y)\,dx = 0$, так как в этом случае все приращения $\Delta x_k = 0$.

Замечание 4. Физически криволинейный интеграл первого рода представляет массу кривой L с линейной плотностью распределения массы вдоль кривой $\rho = f(x,y,z) \geq 0$, общий же интеграл второго рода представляет собой работу силового векторного поля $\vec{a} = (P,Q,R)$ при перемещении точки единичной массы из A в B вдоль кривой L.

Замечание 5. Если кривая L замкнута, т. е. $A = B$, то для криволинейных интегралов принято использовать обозначения

$$\oint\limits_L f(x,y)\,dl \quad \text{или} \quad \oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

при этом *положительным* направлением кривой называют обход, при котором область, лежащая внутри кривой, остается слева при движении вдоль L.

Замечание 6. Если $f(x,y) \equiv 1$, то $\int\limits_L dl = \mu(L)$ — длина кривой L.

Свойства криволинейных интегралов

1 (линейность). *Если для функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой L, то для любых постоянных α и β для функции $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$ существует криволинейный интеграл по кривой L, причем*

$$\int\limits_L (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dl = \alpha \int\limits_L f(x,y)\,dl + \beta \int\limits_L g(x,y)\,dl.$$

2 (аддитивность). *Если дуга AB состоит из двух дуг AC и CB, не имеющих общих внутренних точек, и для функции $f(x,y)$ существует криволинейные интегралы по кривой AB, то для нее существует криволинейный интеграл по каждой из дуг AC и CB, причем*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{CB} f(x,y)\,dl.$$

3 (интегрирование неравенств). *Если для любой точки (x,y) кривой L выполняется неравенство $f_1(x,y) \leq \leq f_2(x,y)$ и для обеих функций $f_1(x,y), f_2(x,y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой L, то*

$$\int\limits_L f_1(x,y)\,dl \leq \int\limits_L f_2(x,y)\,dl.$$

4 (оценка модуля). *Если существует криволинейный интеграл по кривой L от функции $f(x,y)$, то существует криволинейный интеграл по кривой L и от функции $|f(x,y)|$, причем*

$$\left|\int_L f(x,y)\,dl\right| \le \int_L |f(x,y)|\,dl.$$

5 (формула среднего значения). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой L, то существует точка $(\xi,\eta) \in L$ такая, что*

$$\int_L f(x,y)\,dl = f(\xi,\eta)\mu(L),$$

здесь $\mu(L)$ — длина кривой L.

Теорема (о вычислении криволинейных интегралов). *Если кривая L является гладкой и не имеет особых точек (т. е. $(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2 \neq 0$), функции $f(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой L, то криволинейные интегралы можно вычислить по формулам*

$$I_1 = \int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(\varphi(t),\phi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\,dt,$$

$$I_2 = \int_L P(x,y)\,dx = \int_a^b P(\varphi(t),\phi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$I_3 = \int_L Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q(\varphi(t),\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают существование римановских интегралов, фигурирующих в формулах. Докажем первые две из них, третья доказывается так же, как и вторая.

Осуществим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и составим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt.$$

Римановские интегралы для вычисления I_1 и I_2 представим в виде следующих сумм:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \phi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt,$$

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \phi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Составим и оценим разности

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(f(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \phi(t))\Big)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt,$$

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(P(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \phi(t))\Big)\varphi'(t)\, dt.$$

В условиях теоремы функции $f(\varphi(t), \phi(t)), P(\varphi(t), \phi(t))$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а значит и равномерно непрерывны на нем. Из стремления к нулю мелкости разбиения

Δ кривой L следует стремление к нулю мелкости разбиения отрезка $[a, b]$, что вытекает из следующих наблюдений: по условию теоремы функции $\varphi'(t), \phi'(t) \in C[a, b]$ и не обращаются одновременно в нуль, поэтому

$$m = \min_{[a,b]} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \Delta l_k \geq m \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k \;\;\Leftrightarrow\;\; \Delta t_k \leq \frac{1}{m}\Delta l_k.$$

Таким образом, для любого положительного $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L, мелкость которого $\Delta < \delta_\epsilon$, выполняются неравенства

$$|f(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \phi(t)| < \frac{\epsilon}{\mu(L)},$$

$$|P(\varphi(\tau_k), \phi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \phi(t)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)},$$

здесь $\mu(L)$ — длина кривой L, $M = \max\limits_{[a,b]} |\varphi'(t)|$. Из этих оценок получаем

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\epsilon}{\mu(L)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt =$$

$$= \frac{\epsilon}{\mu(L)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \epsilon,$$

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{M(b-a)} \cdot M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \epsilon,$$

что означает предельные равенства $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_1 = I_1$, $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_2 = I_2$ и завершение доказательства. **Теорема доказана.**

Замечание 7. Как следствие из доказанной теоремы можно получить формулу связи криволинейных интегралов первого и второго рода. Действительно, общий интеграл второго рода можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(t),\phi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\phi(t)\Big)\cdot\phi'(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Bigg(P(\varphi(t),\phi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}} +$$

$$+ Q(\varphi(t),\phi(t))\cdot\frac{\phi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}}\Bigg)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}\,dt.$$

Здесь $\bar e = \left(\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}}, \dfrac{\phi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}}\right)$ — единичный касательный вектор кривой L. Если $\bar\imath = (1,0)$ и $\bar\jmath = (0,1)$ — единичные вектора (орты) координатных осей, то

$$\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}} = (\bar e,\bar\imath) = \cos\alpha,$$

$$\frac{\phi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}} = (\bar e,\bar\jmath) = \cos\beta,$$

здесь $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы касательного вектора $\bar e$. Отсюда получаем искомую формулу

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \left(P(\varphi(t), \phi(t)) \cdot \cos\alpha + Q(\varphi(t), \phi(t)) \cdot \cos\beta\right) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_L \left(P(x, y) \cos\alpha + Q(x, y) \cos\beta\right) dl.$$

15.2. Поверхности в R^3. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Поверхности в R^3. Пусть в плоскости R^2 переменных (u, v) задана область D и для всех точек этой области определены три функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

которые в совокупности задают в пространстве R^3 вектор-функцию

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)).$$

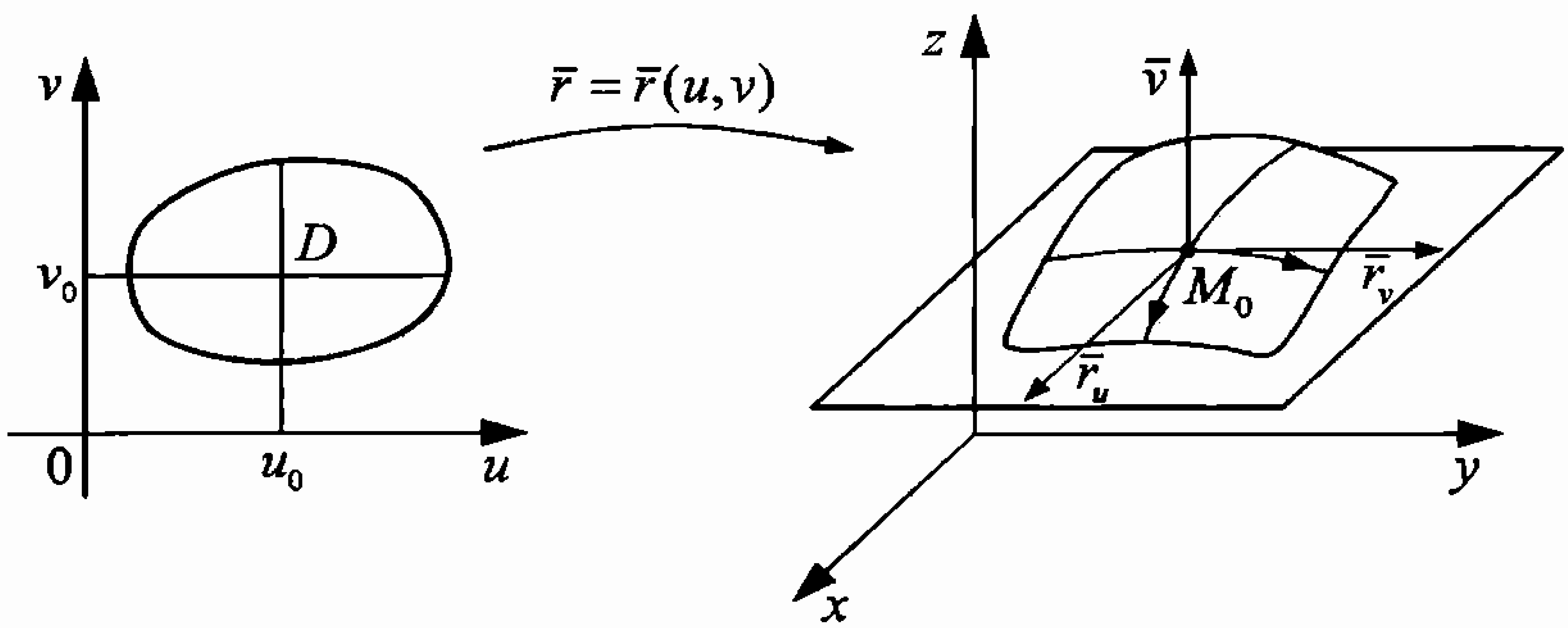
Относительно координатных функций будем предполагать выполненными условия:

1) $x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v) \in C^1(\overline{D})$;

2) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (u, v) \in D.$

Эти условия означают, что функции (1) задают в R^3 гладкую поверхность Φ, не имеющую особых точек.

Если зафиксировать некоторое значение $v = v_0$, то уравнение $\bar{r} = \bar{r}(u, v_0) = (x(u, v_0),\, y(u, v_0),\, z(u, v_0))$ определяет на Φ кривую, называемую *координатной линией*, а вектор $\bar{r}_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$ — *касательный вектор* к этой линии. Аналогично при фиксированном $u = u_0$ уравнение $\bar{r} = \bar{r}(u_0, v) = (x(u_0, v),\ y(u_0, v),\ z(u_0, v))$ определяет на Ф другую координатную линию с касательным вектором $\bar{r}_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$.



Второе условие означает, что касательные векторы не коллинеарны, а значит на них можно натянуть плоскость, называемую *касательной плоскостью* к Ф. Уравнение такой плоскости, проходящей через точку M_0 поверхности Ф с координатами

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0),\ y(u_0, v_0),\ z(u_0, v_0)),$$

имеет вид $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\nu}) = 0$. Здесь $\bar{\nu}$ — единичный нормальный (ортогональный) вектор к касательной плоскости, называемый *нормалью* к поверхности Ф, который можно восстановить как векторное произведение по формуле

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right|} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

В силу первого условия этот вектор непрерывен по u и v в некоторой окрестности произвольной точки поверхности Ф. Говорят, что в окрестности любой точки гладкой поверхности без особых точек существует непрерывное векторное поле нормалей. Такие поверхности принято называть *двусторонними*. Площадь такой поверхности при сделанных предположениях может быть вычислена по формуле

$$\sigma = \iint\limits_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

или в терминах *коэффициентов первой квадратичной формы*

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

$$E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right), \quad G = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right), \quad F = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right).$$

Выражение $\sqrt{EG - F^2} = |\bar{n}|$ называется *дискриминантом первой квадратичной формы.*

Понятие поверхностного интеграла первого и второго рода. Пусть Φ — гладкая двусторонняя поверхность без особых точек, определяемая уравнениями (1) в области D. Предположим, что на Φ определены четыре функции: $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, каждая из которых непрерывна на Φ. Осуществим разбиение Φ гладкими (или кусочно-гладкими) кривыми на части Φ_i и обозначим $\Delta = \max\limits_i \sigma(\Phi_i)$ — диаметр разбиения, здесь

$$\sigma(\Phi_i) = \sigma_i = \iint\limits_{G_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

G_i — прообраз Φ_i при отображении (1). Пусть $\bar{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — векторное поле (единичных) нормалей, $M_i \in \Phi_i$ — точки поверхности. Составим четыре интегральные суммы:

$$\Sigma_1 = \sum_i f(M_i)\sigma_i, \quad \Sigma_2 = \sum_i P(M_i)\sigma_i \cos\alpha,$$

$$\Sigma_3 = \sum_i Q(M_i)\sigma_i \cos\beta, \quad \Sigma_4 = \sum_i R(M_i)\sigma_i \cos\gamma.$$

Определение. Числа I_i называют *пределами* интегральных сумм Σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, при $\Delta \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения поверхности Φ мелкости $\Delta < \delta_\epsilon$ и для любого выбора точек $M_i \in \Phi_i$ выполняется неравенство $|\Sigma_i - I_i| < \epsilon$.

Число I_1 называют *поверхностным интегралом первого рода* и обозначают

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} f(x, y, z)\, d\sigma.$$

Числа I_2, I_3, I_4 называют *поверхностными интегралами второго рода* и обозначают

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z) \cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi} P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z) \cos\beta\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi} Q(x, y, z)\, dz\, dx,$$

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} R(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Сумму трех последних интегралов называют *общим поверхностным интегралом второго рода.*

Замечание 1. Из определения поверхностных интегралов вытекает, что поверхностный интеграл первого рода не зависит от ориентации поверхности Φ, а поверхностный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления нормали поверхности на противоположное.

Замечание 2. Значения поверхностных интегралов первого и второго рода не зависят от выбора системы координат (т. е. они инвариантны при переходе к новым (криволинейным) координатам (u_1, v_1)).

Замечание 3. Если вдоль поверхности Φ одна из координат постоянна, например $x \equiv C$, то $\iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\,dx\,dy = 0$, так как в этом случае нормальный вектор имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (1,0,0)$.

Замечание 4. Физически поверхностный интеграл первого рода представляет массу нагруженной поверхности Φ с поверхностной плотностью распределения массы $\rho = f(x,y,z) \geq 0$, а общий поверхностный интеграл второго рода представляет собой поток векторного поля $\vec{a} = (P,Q,R)$ за единицу времени в направлении вектора нормали.

Замечание 5. Если поверхность Φ замкнута, то для поверхностных интегралов принято использовать обозначения

$$\iint\limits_{\Phi+} f(x,y,z)\,d\sigma \qquad \text{или}$$

$$\iint\limits_{\Phi+} (P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy),$$

при этом *положительным* направлением нормали называют внешнее направление к объему, ограниченному поверхностью.

Замечание 6. Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то $\iint\limits_{\Phi} d\sigma = S(\Phi)$ — площадь поверхности Φ.

Для вычисления поверхностных интегралов пользуются следующей теоремой.

Теорема (о вычислении поверхностных интегралов). *Если Φ — гладкая двусторонняя поверхность без особых точек, определяемая уравнениями* (1) *в области*

D, функции $f(x,y,z)$, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, непрерывны на Φ, тогда поверхностные интегралы можно вычислить по формулам

$$I_1 = \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)\cos\alpha\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\alpha\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)\cos\beta\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\beta\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cos\gamma\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Доказательство. Докажем первую из формул, остальные доказываются аналогично. По определению

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(M_i)\sigma_i =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(M_i)\iint\limits_{G_i}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

тогда по теореме о среднем для двойного интеграла

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(M_i)\sqrt{EG-F^2}(N_i)S_{G_i},$$

где $M_i = \bar{r}(u_i, v_i)$, $(u_i, v_i), N_i \in G_i$. С другой стороны,

$$\iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_i f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))\sqrt{EG-F^2}(u_i,v_i)S_{G_i},$$

здесь $\{G_i\}$ — разбиение области D, индуцированное разбиением поверхности Φ. Покажем, что эти два предела совпадают. Рассмотрим разности интегральных сумм (соответствующих одному разбиению области D)

$$\sum_i f(M_i)(\sqrt{EG-F^2}(N_i) - \sqrt{EG-F^2}(u_i,v_i))S_{G_i}.$$

По условию теоремы $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности Φ, следовательно, $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ непрерывна на $\overline{D}$, а значит ограничена на $\overline{D}$, т.е. существует постоянная $K > 0$ такая, что $|f| \le K$ на $\overline{D}$. Вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ в силу условия 1 непрерывно дифференцируема, поэтому дискриминант первой квадратичной формы $\sqrt{EG-F^2}$ непрерывен на $\overline{D}$, а значит по теореме Кантора и равномерно непрерывна на $\overline{D}$, т.е. для любого положительного $\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любой пары точек $(u',v'), (u'',v'') \in \overline{D}$ таких, что

$$\sqrt{(u'-u'')^2 + (v'-v'')^2} < \delta_\epsilon,$$

выполняется неравенство

$$\left|\sqrt{EG-F^2}(u',v') - \sqrt{EG-F^2}(u'',v'')\right| < \epsilon.$$

Отсюда для любого разбиения T области $\overline{D}$ достаточной мелкости $\delta_T < \delta_\epsilon$ справедливо неравенство

$$\left|\sqrt{EG-F^2}(N_i) - \sqrt{EG-F^2}(u_i, v_i)\right| < \frac{\epsilon}{K \cdot S_D},$$

здесь S_D — площадь области D. Теперь следует оценка

$$\left|\sum_i f(M_i)(\sqrt{EG-F^2}(N_i) - \sqrt{EG-F^2}(u_i, v_i))S_{G_i}\right| \le$$

$$\le K \cdot \frac{\epsilon}{K \cdot S_D} \cdot \sum_i S_{G_i} = \epsilon,$$

из которой в силу произвольности выбора $\epsilon > 0$ получаем требуемое интегральное равенство. **Теорема доказана.**

Замечание 7. При вычислении поверхностных интегралов произведения $\cos\alpha\sqrt{EG-F^2}$, $\cos\beta\sqrt{EG-F^2}$, $\cos\gamma\sqrt{EG-F^2}$ удобнее находить следующим образом:

$$\cos\alpha\sqrt{EG-F^2} = (\bar{\nu}, \bar{i})\sqrt{EG-F^2} = \left(\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}, \bar{i}\right)|\bar{n}| = (\bar{n}, \bar{i}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\cos\beta\sqrt{EG-F^2} = (\bar{\nu}, \bar{j})\sqrt{EG-F^2} = \left(\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}, \bar{j}\right)|\bar{n}| = (\bar{n}, \bar{j}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$\cos\gamma\sqrt{EG-F^2} = (\bar{\nu}, \bar{k})\sqrt{EG-F^2} = \left(\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}, \bar{k}\right)|\bar{n}| = (\bar{n}, \bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

15.3. Формула Грина

Пусть D — область в R^2, γ^+ — положительно ориентированный замкнутый контур, ограничивающий область D.

Теорема (формула Грина). *Пусть γ^+ — гладкая (кусочно-гладкая) кривая, на $\overline{D}$ задана пара функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таких, что P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{D})$ (т. е. непрерывны по совокупности переменных), тогда*

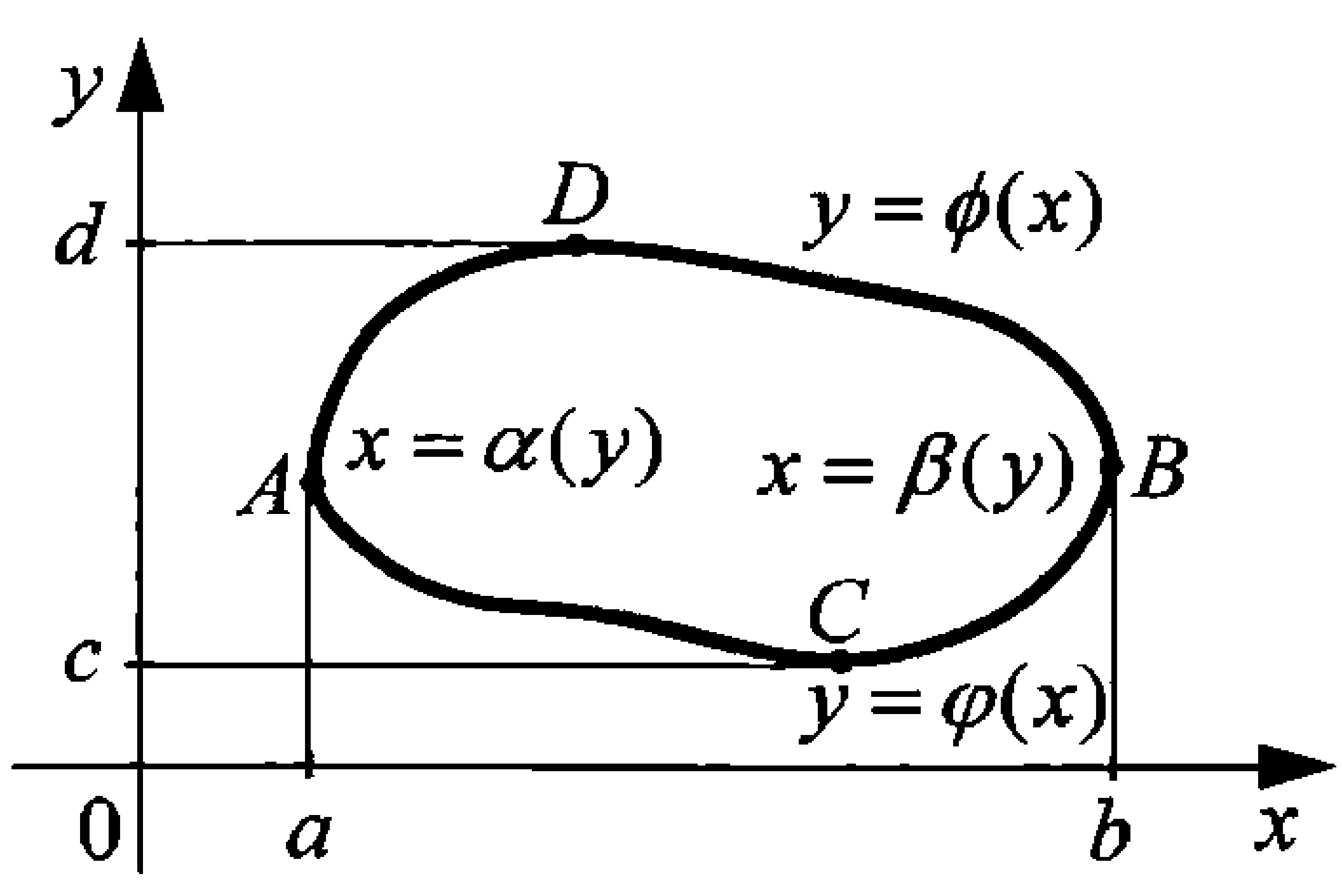
$$\oint\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Доказательство. Предположим, что границу γ^+ можно представить как объединение графиков двух кусочно-непрерывных функций двумя способами:

$$y = \varphi(x), \quad y = \phi(x), \quad a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le \phi(x)$$

и

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y), \quad c \le y \le d, \quad \alpha(y) \le \beta(y),$$



тогда по теореме о сведении двойного интеграла к повторному получаем следующие две цепочки равенств:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x,\phi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$

$$= -\int\limits_{B\breve{D}A} P(x,y)\,dx - \int\limits_{A\breve{C}B} P(x,y)\,dx = -\oint\limits_{\gamma^+} P\,dx,$$

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right] dy =$$

$$= \int\limits_c^d [Q(\beta(y),y) - Q(\alpha(y),y)]\,dy =$$

$$= \int\limits_{C\breve{B}D} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{D\breve{A}C} Q(x,y)\,dy = \oint\limits_{\gamma^+} Q\,dy.$$

Вычитая теперь из второго равенства первое, получим требуемое. **Теорема доказана.**

Замечание (о вычислении площадей). Если в формуле Грина положить $Q = x$, $P = 0$, то

$$S_D = \iint\limits_D dx\,dy = \oint\limits_{\gamma^+} x\,dy,$$

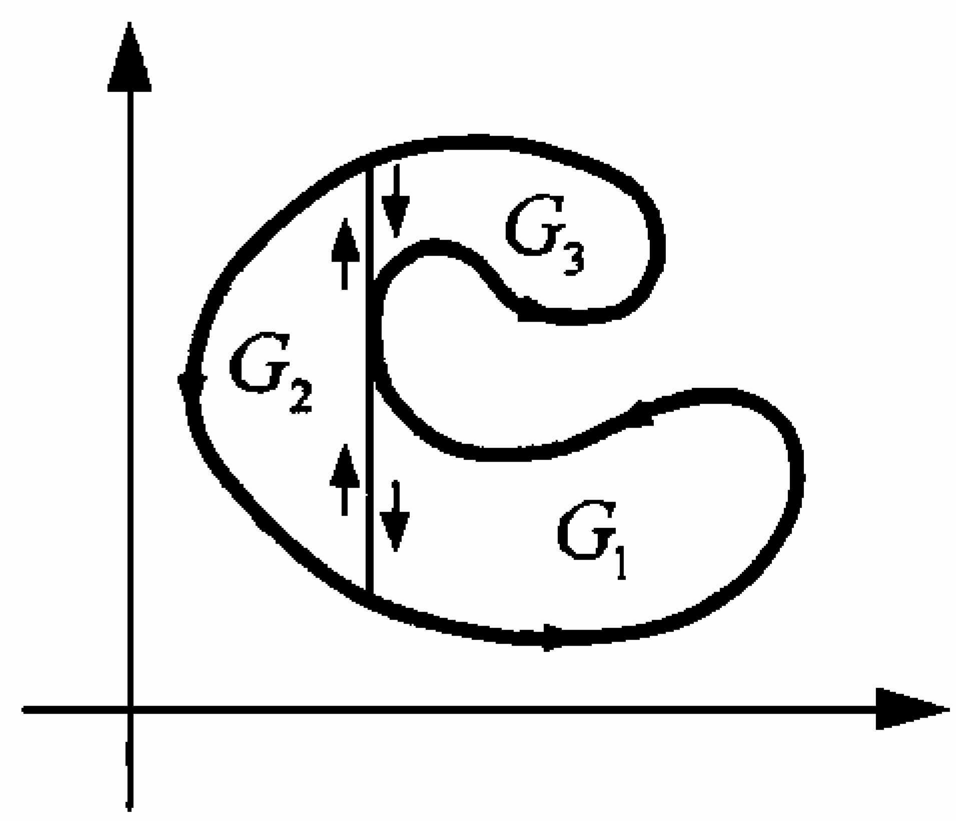
а если положить $Q = 0$, $P = -y$, то

$$S_D = \iint\limits_D dx\,dy = -\oint\limits_{\gamma^+} y\,dx,$$

складывая теперь оба эти равенства, получим

$$S_D = \frac{1}{2} \oint\limits_{\gamma^+} (x\,dy - y\,dx).$$

Замечание 1. Если область G имеет более сложную структуру, чем в формулировке теоремы, то осуществив дополнительные разрезы, как показано на рисунке, мы разобьем G на куски G_1, G_2, ..., G_n, для каждого из которых теорема доказана, тогда по свойству аддитивности двойного интеграла



$$\iint\limits_G = \iint\limits_{G_1} + \iint\limits_{G_2} + \ldots + \iint\limits_{G_n} =$$

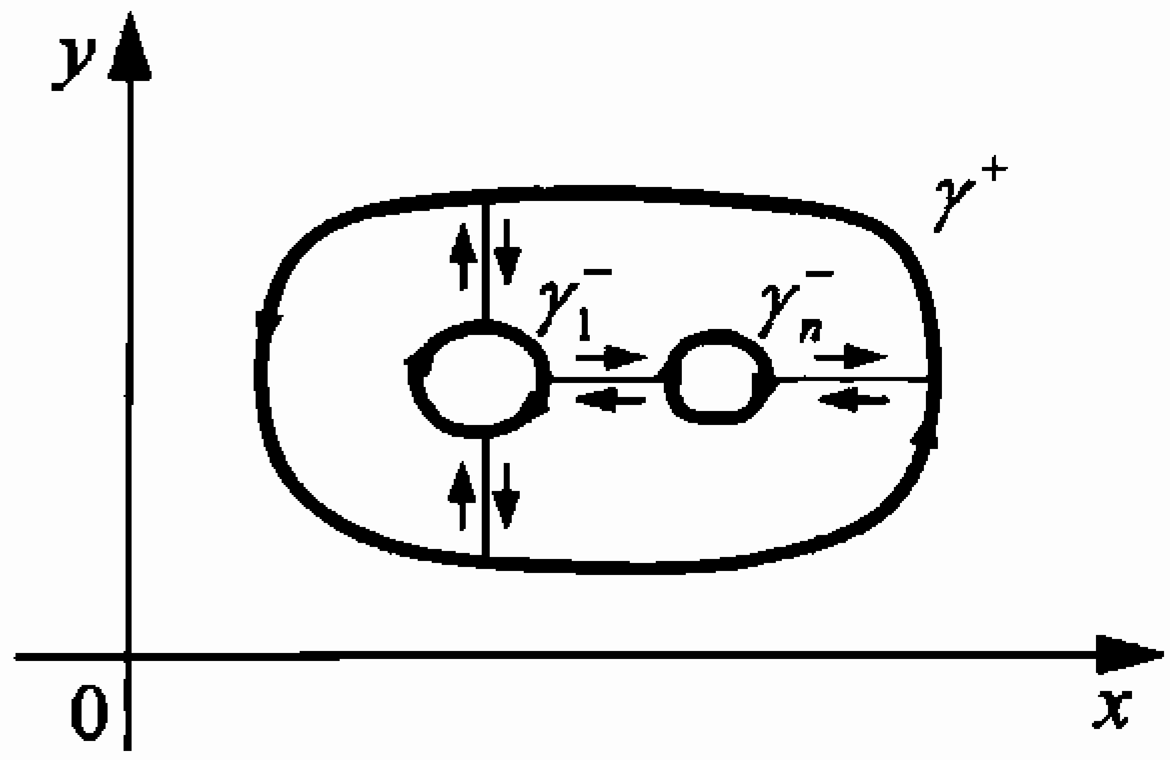
$$= \oint\limits_{\gamma_1^+} + \oint\limits_{\gamma_2^+} + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n^+} = \oint\limits_{\gamma^+},$$

так как все линии дополнительных разрезов обходятся дважды, причем в обратных направлениях, но криволинейный интеграл 2-го рода меняет свое значение на противоположное при изменении направления обхода контура, поэтому в сумме

$$\oint\limits_{\gamma_1^+} + \oint\limits_{\gamma_2^+} + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n^+}$$

все слагаемые, соответствующие дополнительным разрезам, «съели» друг друга.

Замечание 2. В случае области с «дырками» сумма криволинейных интегралов в формуле Грина имеет вид



$$\oint\limits_{\gamma^+} + \oint\limits_{\gamma_1^-} + \oint\limits_{\gamma_2^-} + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n^-},$$

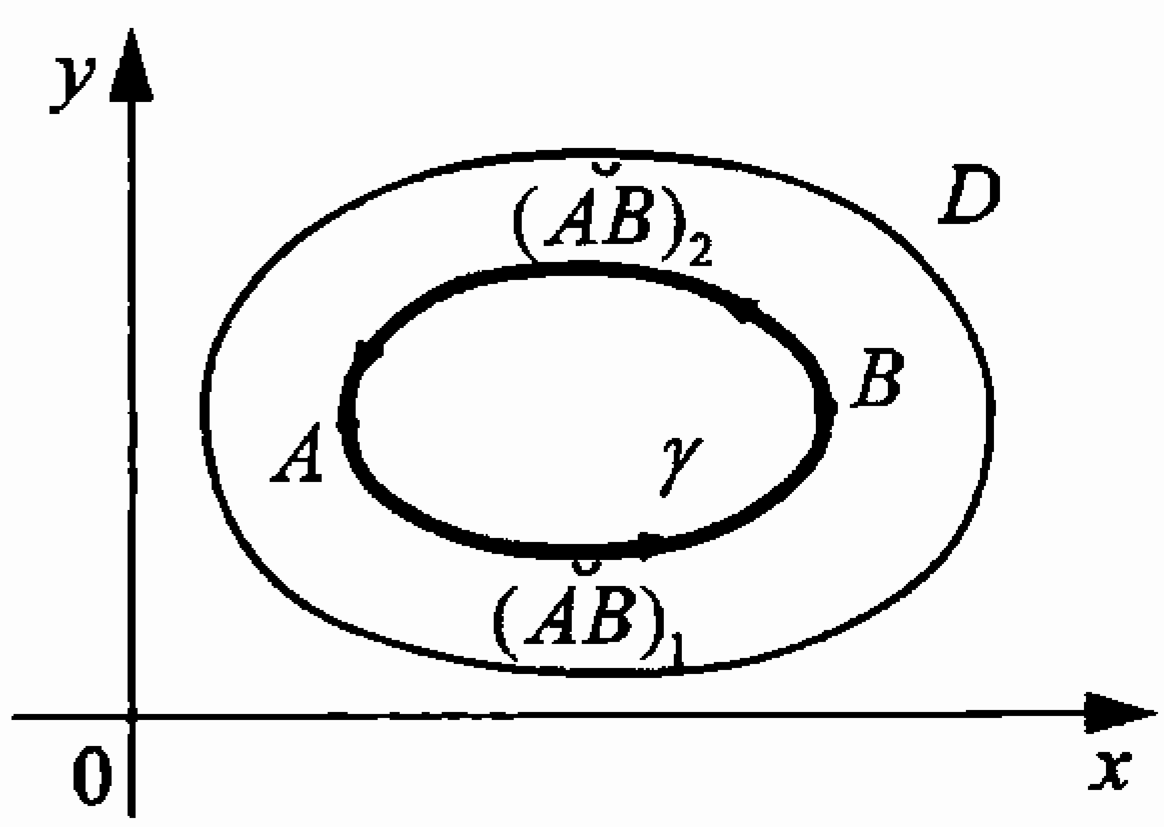
здесь γ^+ — внешний контур, проходимый против хода часов, $\gamma_1^-, \ldots, \gamma_n^-$ — внутренние контуры, проходимые по ходу часов.

15.4. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Пусть $D \subset R^2$ — область (связное открытое множество), функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны на D.

Лемма (вспомогательная). *В сделанных предположениях криволинейный интеграл 2-го рода* $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$, *где* $\breve{AB} \subset D$ *— кривая, соединяющая точки* A *и* B, *не зависит от пути интегрирования* $\breve{AB}$ *тогда и только тогда, когда интеграл* $\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy)$ *по любому замкнутому контуру* $\gamma \subset D$ *равен нулю.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$ справедливо равенство $\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) = 0$. Рассмотрим две различные кривые $(\breve{AB})_1$ и $(\breve{AB})_2$, соединяющие точки A и B, из которых построим замкнутый контур $(\breve{AB})_1 \cup (\breve{BA})_2$, здесь $(\breve{BA})_2$ получен из $(\breve{AB})_2$ заменой ориентации на проти-



воположную, тогда

$$0 = \oint\limits_{(\overset{\smile}{AB})_1 \cup (\overset{\smile}{BA})_2} (P\,dx + Q\,dy) = \left(\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})_1} + \int\limits_{(\overset{\smile}{BA})_2} \right) (P\,dx + Q\,dy) =$$

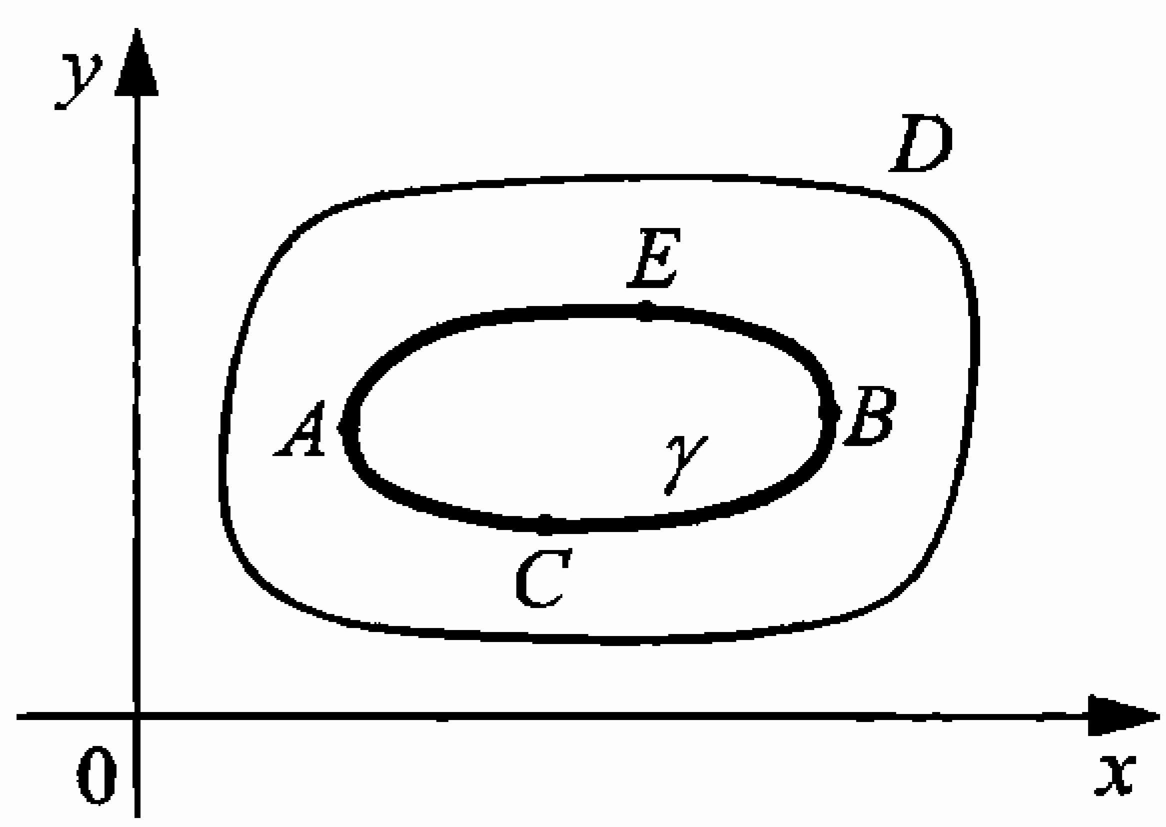
$$= \left(\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})_1} - \int\limits_{(\overset{\smile}{AB})_2} \right) (P\,dx + Q\,dy),$$

т. е.

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})_1} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{(\overset{\smile}{AB})_2} (P\,dx + Q\,dy),$$

а значит интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$ не зависит от пути интегрирования.

Необходимость. Пусть интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$ не зависит от пути интегрирования и $\gamma \subset D$ — произвольный замкнутый контур. Выберем на γ четыре различные произвольные точки A, C, B, E, тогда



$$\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \left(\int\limits_{A\breve{C}B} + \int\limits_{B\breve{E}A} \right) (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \left(\int\limits_{A\breve{C}B} - \int\limits_{A\breve{E}B} \right) (P\,dx + Q\,dy) = 0.$$

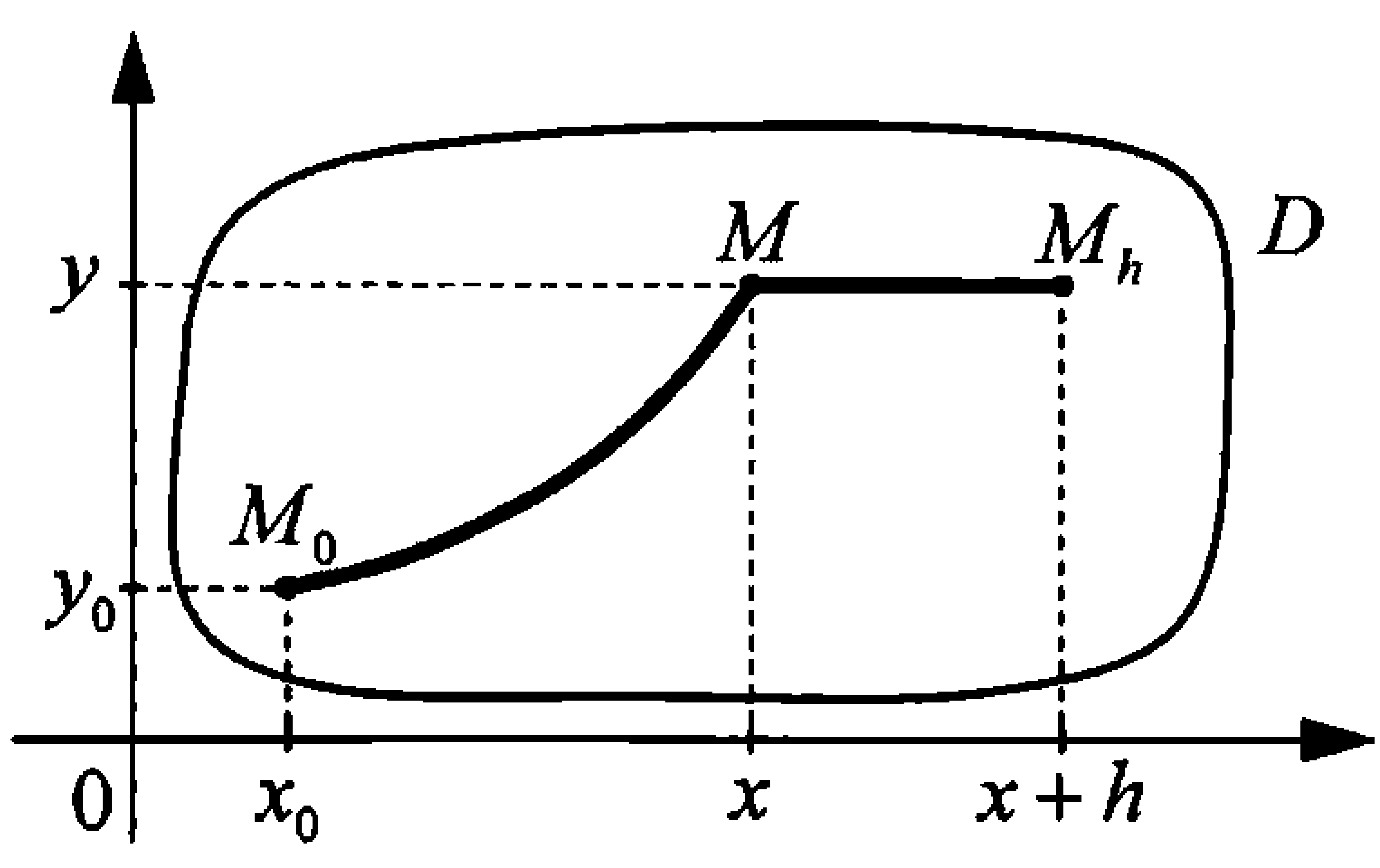
Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны на D. Для того чтобы криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$, A, $B \in D$, не зависел от пути интегрирования $\breve{AB} \subset D$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $(P\,dx + Q\,dy)$ (первая дифференциальная форма) являлось бы полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $u = u(x,y)$, определенной в области D, т. е. $du = P\,dx + Q\,dy$ или $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$ на D, при этом $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy) = u(B) - u(A)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, а лишь от его начала и конца. Зафиксируем точку-начало $M_0(x_0, y_0) \in D$ и выберем любую другую точку $M(x,y) \in D$, затем соединим эти точки кусочно-гладкой кривой $M_0\breve{}M \subset D$. Введем функцию точки области D по правилу

$$u(x,y) = u(M) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{M_0\breve{}M} (P\,dx + Q\,dy),$$

это однозначная функция точки M, так как интеграл не зависит от пути интегрирования, а лишь от начала и конца кривой $M_0\breve{}M \subset D$. Вычислим частные производные этой функции (по определению см. § 8.2). Составим разностное



отношение для функции $u(x, y)$ в точке $M(x, y)$

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \left(\int\limits_{M_0 \breve{} M_h} - \int\limits_{M_0 \breve{} M} \right) (P\,dx + Q\,dy) \overset{y=\text{Const}}{=}$$

$$= \int\limits_{[MM_h]} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+h} P(x, y)\,dx.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла (см. § 5.10)

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{x}^{x+h} P(x, y)\,dx = P(x + \theta h, y) \cdot h,$$

$$0 < \theta < 1,$$

или

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = P(x + \theta h, y).$$

Отсюда в силу непрерывности функции $P(x, y)$ находим предел разностного отношения и частную производную

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} P(x + \theta h, y) = P(x, y).$$

Аналогично находим $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$, тем самым доказано существование функции двух переменных $u = u(x, y)$ такой, что $du = P\,dx + Q\,dy$.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, — некоторая параметризация кривой, соединяющей точки A и B, $A(x(a), y(a))$, $B(x(b), y(b))$, тогда

$$\int\limits_{A \breve{} B} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}y'(t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{du(x(t), y(t))}{dt}\,dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) =$$

$$= u(B) - u(A).$$

Достаточность. Пусть для любой кривой $\breve{AB} \subset D$ $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy) = u(B) - u(A)$, тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$, начинающегося и заканчивающегося в точке A, справедливо равенство $\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) = u(A) - u(A) = 0$, что согласно вспомогательной лемме и означает независимость значения интеграла $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$ от пути интегрирования. **Теорема 1 доказана.**

Определение. Область D называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$ ограниченная им подобласть D_1 полностью находится внутри D (т. е. область D «без дырок»).

Теорема 2. *Пусть функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны на* D. *Для того чтобы криволинейный интеграл 2-го рода* $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$, $A, B \in D$, *не зависел от пути интегрирования* $\breve{AB} \subset D$, *необходимо, а в случае односвязности области* D *и достаточно, чтобы в* D *выполнялось равенство* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство. Здесь докажем только необходимость этой теоремы. Пусть интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$, A, $B \in D$, не зависит от пути интегрирования $\breve{AB} \subset D$, тогда согласно теореме 1 существует функция двух переменных $u = u(x, y)$ такая, что в области D $du = P\,dx + Q\,dy$, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$ на D. Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D)$, поэтому по теореме Шварца (см. § 8.4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ или $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. **Теорема 2 доказана.**

Замечание. Условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ называют *критерием полного дифференциала в односвязной области*, так как это условие необходимое и достаточное, чтобы выражение $(P\,dx + Q\,dy)$ было в области D дифференциалом некоторой функции двух переменных $u(x, y)$.

15.5. Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, циркуляция, ротор (вихрь), поток

Скалярным полем называют любую числовую функцию точки пространства $u = u(x, y, z)$, а вектор-функцию точки пространства $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ называют *векторным полем*. Если скалярное поле $u = u(x, y, z)$ определено и дифференцируемо в некоторой области $D \subset R^3$, тогда оно порождает векторное поле своих *градиентов* по правилу

$$\bar{a} = \operatorname{grad} u \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Если же векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$, заданное в некоторой области $D \subset R^3$, таково, что для него существует определенная в D числовая функция $u = u(x, y, z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} u$, то эту функцию $u = u(x,y,z)$ называют *потенциалом векторного поля* $\bar{a} = \bar{a}(x,y,z)$.

Рассмотрим векторное поле $\bar{a} = (P,Q,R)$, заданное в области $D \subset R^3$, координатные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ которого дифференцируемы в $D \subset R^3$, тогда *дивергенцией* такого векторного поля называют выражение (скалярное поле)

$$\operatorname{div} \bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

соответственно *вихрем* (или *ротором*) векторного поля $\bar{a} = (P,Q,R)$ называют новое векторное поле, определяемое следующим образом:

$$\operatorname{rot} \bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Вводя векторный оператор $\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ — «набла», можно записать введенные операции над полями следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = \bar{\nabla} u, \quad \operatorname{div} \bar{a} = (\bar{\nabla}, \bar{a}), \quad \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{\nabla} \times \bar{a}.$$

Если γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области $D \subset R^3$, то *циркуляцией* векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(x,y,z)$ по контуру γ называется криволинейный интеграл 2-го рода общего вида

$$\oint_\gamma \bar{a}\, d\bar{r} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_\gamma (P\, dx + Q\, dy + R\, dz).$$

Векторное поле, циркуляция которого по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, лежащему в области $D \subset R^3$, равна нулю, называется *потенциальным*.

Во вспомогательной лемме предыдущего параграфа было показано, что условие равенства нулю интеграла $\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy)$ по любому замкнутому контуру $\gamma \subset D$ равносильно независимости значения криволинейного интеграла 2-го рода $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$ от пути интегрирования $\breve{AB} \subset D$. При доказательстве леммы нигде не использовалось, что кривая γ плоская, поэтому приведенное там доказательство полностью переносится на случай пространственной кривой. Таким образом справедлива следующая

Лемма. *Циркуляция векторного поля* $\bar{a} = (P, Q, R)$

$$\oint\limits_{\gamma} \bar{a}\,d\bar{r} = \oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

равна нулю по любому замкнутому контуру $\gamma \subset D \subset R^3$ *тогда и только тогда, когда интеграл* $\int\limits_{\breve{AB}} (P\,dx + Q\,dy + {}$ ${}+R\,dz)$ *не зависит от пути интегрирования* $\breve{AB} \subset D \subset$ $\subset R^3$.

Пусть $\Phi \subset D \subset R^3$ — некоторая поверхность, $\bar{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности Φ, задающий на Φ ориентацию, через Φ^+ будем обозначать поверхность Φ с фиксированной ориентацией (задаваемой векторным полем нормалей $\bar{\nu}$), тогда общий поверхностный интеграл 2-го рода вида

$$\iint\limits_{\Phi^+} \bar{a}\,d\bar{\sigma} \overset{\mathrm{def}}{=} \iint\limits_{\Phi^+} (\bar{a}, \bar{\nu})\,d\sigma$$

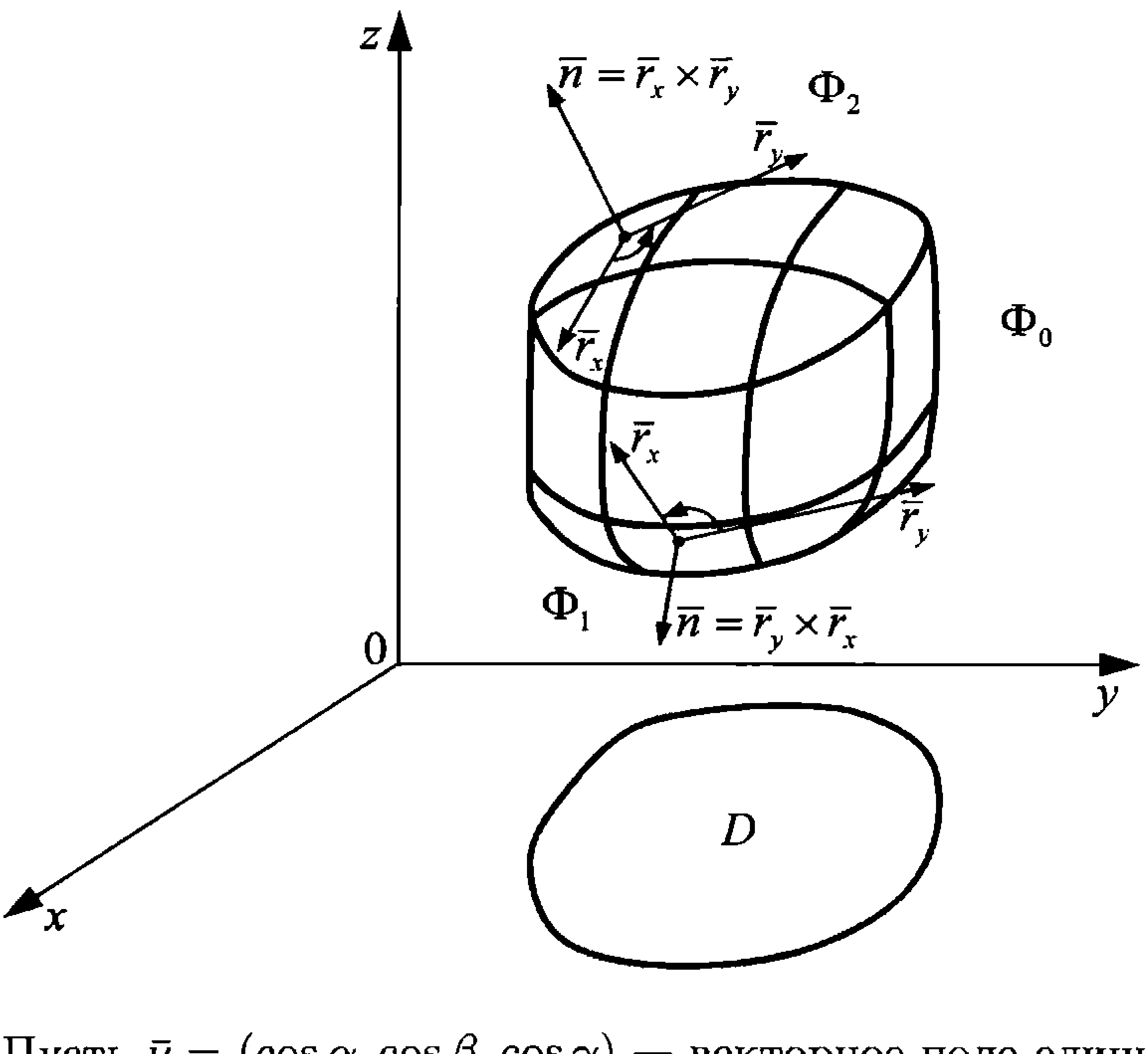
называется *потоком* векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ через поверхность Φ в направлении нормали $\bar{\nu}$. Если $\bar{a} = (P, Q, R)$, то

$$\iint\limits_{\Phi^+} \bar{a}\,d\bar{\sigma} = \iint\limits_{\Phi^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Phi+} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy).$$

15.6. Теорема Остроградского – Гаусса. Соленоидальные векторные поля

Пусть замкнутый пространственный объем $V \subset R^3$ проецируется на плоскость XoY в некоторую область D, причем объем ограничен следующими кусочно-гладкими поверхностями: снизу Φ_1, задаваемой функцией $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, сверху — Φ_2, $z = \phi(x, y)$, $(x, y) \in D$, $\phi(x, y) \geq \varphi(x, y)$, и цилиндрической поверхностью Φ_0. Относительно координатных плоскостей XoZ и YoZ объем $V \subset R^3$ имеет такую же конфигурацию.



Пусть $\bar{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — векторное поле единичных внешних нормалей к поверхности $\partial V \equiv \Phi \equiv \Phi_2 \cup \Phi_1 \cup \Phi_0$.

Теорема Остроградского – Гаусса. *Пусть функции* $P,\ Q,\ R,\ \dfrac{\partial P}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial y},\ \dfrac{\partial R}{\partial z} \in C(\overline{V})$, *тогда*

$$\iint\limits_{\Phi^+} (\bar{a}, \bar{\nu})\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \bar{a}\, dx\, dy\, dz$$

или

$$\iint\limits_{\Phi^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

т. е. поток векторного поля $\bar{a} = (P, Q, R)$ *через замкнутую поверхность* Φ *в направлении внешней нормали* $\bar{\nu}$ *равен тройному интегралу от дивергенции этого векторного поля по объему, ограниченному замкнутой поверхностью* Φ.

Доказательство. Преобразуем тройной интеграл, перейдя к повторному:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\phi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \Big(R(x, y, \phi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) \Big) dx\, dy.$$

С другой стороны,

$$\iint\limits_{\Phi^+} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi_2^+ \cup \Phi_1^+ \cup \Phi_0^+} R\cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_2^+} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint\limits_{\Phi_1^+} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint\limits_{\Phi_0^+} R\cos\gamma\, d\sigma.$$

Вычислим каждый из этих интегралов в отдельности. Поверхность Φ_2^+ допускает параметризацию $\bar{r} = \bar{r}(x,y) = (x, y, \phi(x,y))$, $(x,y) \in D$, тогда вектор внешней нормали восстанавливается по формуле $\bar{n} = \bar{r}_x \times \bar{r}_y$, поэтому (см. замечание к теореме о вычислении поверхностных интегралов § 15.2) $\cos\gamma\sqrt{EG - F^2} = (\bar{n}, \bar{k}) = 1$, и значит

$$\iint\limits_{\Phi_2^+} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_D R(x,y,\phi(x,y))\cos\gamma\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D R(x,y,\phi(x,y))\,dx\,dy.$$

Параметризуем поверхность Φ_1^+: $\bar{r} = \bar{r}(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$, $(x,y) \in D$, и находим вектор ее внешней нормали $\bar{n} = \bar{r}_y \times \bar{r}_x$, тогда $\cos\gamma\sqrt{EG - F^2} = (\bar{n}, \bar{k}) = -1$, и значит

$$\iint\limits_{\Phi_1^+} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_D R(x,y,\varphi(x,y))\cos\gamma\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy = -\iint\limits_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.$$

Наконец, на цилиндрической поверхности Φ_0^+ (параллельной оси Oz) $\cos\gamma = 0$, поэтому

$$\iint\limits_{\Phi_0^+} R\cos\gamma\, d\sigma = 0.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(\iint\limits_{\Phi_2^+} + \iint\limits_{\Phi_1^+} + \iint\limits_{\Phi_0^+}\right) R\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_{\Phi^+} R\cos\gamma\,d\sigma.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Phi^+} P\cos\alpha\,d\sigma,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Phi^+} Q\cos\beta\,d\sigma.$$

Складывая все три полученных равенства, получим формулу Остроградского–Гаусса. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$, P, Q, $R \in C^1(\overline{V})$, называется *соленоидальным* в объеме $V \subset R^3$, если $\operatorname{div}\bar{a} = 0$ в V, т. е. как следствие из теоремы Остроградского–Гаусса получаем, что поток соленоидального векторного поля через замкнутую поверхность Φ в направлении внешней нормали $\bar{\nu}$ равен нулю.

Замечание 2. Формулу Остроградского–Гаусса можно переписать в виде

$$\iint\limits_{\Phi^+} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Замечание 3 (о вычислении объемов). Для векторного поля $\bar{a} = (x, y, z)$ формула Остроградского–Гаусса имеет вид

$$\iint_{\Phi+} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{\Phi+} (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy) = \iiint_V 3\, dx\, dy\, dz = 3V,$$

откуда вытекают следующие две формулы для вычисления объемов:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Phi+} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, d\sigma =$$

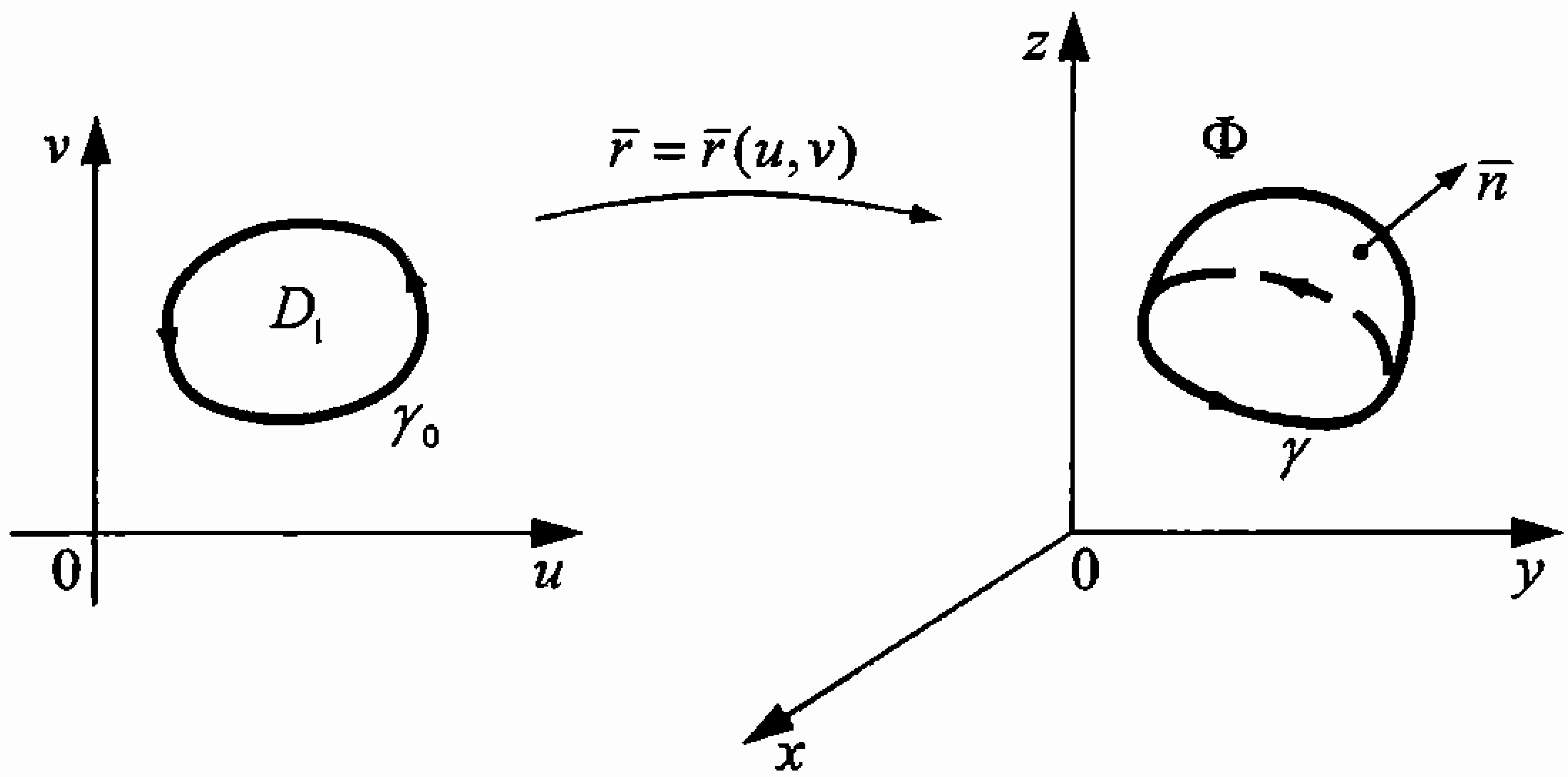
$$= \frac{1}{3} \iint_{\Phi+} (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy).$$

15.7. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля

Пусть $\Phi \subset V \subset R^3$ является поверхностью класса $C^2(\overline{D_1})$, $D_1 \subset R^2$, т. е. координатные функции ее параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \in D_1 \subset R^2$, принадлежат классу дважды непрерывно-дифференцируемых функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v) \in C^2(\overline{D_1})$. Пусть замкнутый контур γ_0, ограничивающий область $D_1 \subset R^2$, ориентирован положительно и параметризован $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t) = (u(t), v(t))$, $a \le t \le b$. Говорят, что поверхность Φ натянута на контур $\gamma = \bar{r}(\bar{\rho}(t)) = \bar{r}(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$, направление обхода которого согласовано с направлением векторного поля нормалей к Φ.

Теорема Стокса. *Пусть функции P, Q, $R \in C^1(\overline{V})$, тогда*

$$\oint_\gamma \bar{a}\, d\bar{r} = \iint_{\Phi+} (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{\nu})\, d\sigma$$



(*т. е. циркуляция векторного поля* $\bar{a}$ *по замкнутому контуру* γ *равна потоку вихря этого поля через поверхность* Φ*, натянутую на этот контур в направлении векторного поля нормалей к* Φ) *или в другой форме записи*

$$\oint\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint\limits_{\Phi^+} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Доказательство. Преобразуем криволинейный интеграл следующим образом:

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))\cdot x'_t(u(t),v(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt =$$

$$= \oint\limits_{\gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\frac{\partial x}{\partial v}\,dv.$$

Отсюда по формуле Грина

$$\oint_\gamma P\,dx = \iint_{D_1} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\,dv =$$

$$= \iint_{D_1} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right] du\,dv =$$

$$= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] du\,dv =$$

$$= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial P}{\partial z}(\bar{n},\bar{j}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\bar{n},\bar{k})\right] du\,dv,$$

здесь $\bar{n} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v$ — вектор нормали к поверхности Ф. Отсюда по формуле вычисления поверхностных интегралов получаем

$$\oint_\gamma P\,dx = \iint_{\Phi^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint_\gamma Q\,dy = \iint_{\Phi^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma,$$

$$\oint_\gamma R\,dz = \iint_{\Phi^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma.$$

Складывая почленно эти равенства, получим формулу Стокса. **Теорема доказана.**

Следствие. *Пусть функции P, Q, $R \in C^1(\overline{V})$, тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

а) *векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$ потенциально в объеме V, т. е. для любого замкнутого контура $\gamma \subset V$ циркуляция поля $\bar{a} = (P, Q, R)$ по этому контуру равна нулю: $\oint\limits_{\gamma} \bar{a}\,d\bar{r} = 0$, что в свою очередь означает независимость интеграла $\int\limits_{\breve{AB}} \bar{a}\,d\bar{r}$ от пути интегрирования $\breve{AB}$;*

б) *существует потенциал векторного поля $\bar{a} = (P, Q, R)$, т. е. существует функция $u(x, y, z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} u$, тогда $\bar{a}\,d\bar{r} = du$ и $\int\limits_{\breve{AB}} \bar{a}\,d\bar{r} = u(B) - u(A)$;*

в) *векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$ безвихревое в объеме V, т. е. $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$ или*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказывается так же, как вспомогательная лемма и теорема из § 15.4. Докажем импликацию б) $\Rightarrow$ в). Так как $\bar{a} = \operatorname{grad} u(x, y, z)$, то функция $u(x, y, z) \in C^2(\overline{V})$, поэтому ее смешанные частные производные равны между собой. Если векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$ безвихревое в объеме V, т. е. $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$, тогда по формуле Стокса $\oint\limits_{\gamma} \bar{a}\,d\bar{r} = \iint\limits_{\Phi^+} (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{\nu})\,d\sigma = 0$, что и означает потенциальность векторного поля $\bar{a}$. **Следствие доказано.**

Библиографический список

1. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 1. — 660 с.

2. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 2. — 357 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 1. — 446 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 2. — 464 с.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2008. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — 704 с.

6. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. — 720 с.

7. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2006. — Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа. — 352 с.

Дополнительные учебники

8. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2008. — 640 с.

9. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 1. — 608 с.

10. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 2. — 800 с.

11. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 3. — 656 с.

12. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 1. — 468 с.

13. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 2. — 448 с.

14. *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 672 с.

15. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 1. — 648 с.

16. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — Т. 2. — 464 с.

17. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 1. — 400 с.

18. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 2. — 624 с.

19. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 1. — 664 с.

20. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 2. — 794 с.

21. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1967. — Т. 1. — 704 с.

22. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1970. — Т. 2. — 672 с.

23. *Рудин, У.* Основы математического анализа / У. Рудин. — М. : Мир, 1976. — 320 с.

Основные задачники

24. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 560 с.

25. Математический анализ в вопросах и задачах: в 2 т. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. — СПб.: Лань, 2008. — 480 с.

26. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. — 728 с.

27. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — 712 с.

28. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. — 496 с.

29. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2. Интегралы. Ряды. — 505 с.

30. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. Функции нескольких переменных. — 473 с.

Дополнительные задачники

31. *Марон, И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А. Марон. — СПб.: Лань, 2008. — 400 с.

32. Задачник по курсу математического анализа: в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М.: Просвещение, 1971. — Т. 1. — 343 с.

33. Задачник по курсу математического анализа: в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М.: Просвещение, 1971. — Т. 2. — 336 с.

34. *Очан, Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу / Ю. С. Очан. — М. : Просвещение, 1981. — 271 с.

35. *Шибинский, В. М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В. М. Шибинский. — М. : Высш. шк., 2007. — 544 с.

36. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М. : «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 1. — 304 с.

37. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М. : «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 2. — 416 с.

38. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. — М. : Высш. шк., 1966. — 464 с.

Учебное издание

Фалалеев Михаил Валентинович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 4

ISBN 978-5-9624-0826-2 (ч. 4)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Редактор *Э. А. Невзорова*
Компьютерный набор *М. В. Фалалеев*
Макет и рисунки подготовлены при помощи системы LaTeX в РИО ИДСТУ СО РАН *Н. В. Починской*

Темплан 2013 г. Поз. 89
Подписано к печати 12.09.2013. Формат 60×90 1/16.
Уч.-изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 7,1. Тираж 100 экз. Заказ 93

Издательство ИГУ
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36